Dobble (SMFMle)

Autoři:

Anežka Lazarová

Vojtěch Lorenc

Ema Čekalová

Vedoucí:

Martina Chamrová

29.6. – 13.7. 2024

V Plasnici v Orlických horách

Obsah

Anotace

Náš projekt se zabývá karetní hrou Dobble, matematikou, která se za ní skrývá a výrobou vlastní verze této hry. Na začátku dokumentace se vyskytují též obecné informace o hře a krátká historie jejího vzniku. Celou dokumentaci provázejí grafická zobrazení daných jevů.

Poděkování

Chtěli bychom poděkovat naší vedoucí práce Martině Chamrové, která nám poskytla všechny potřebné podklady k naší práci i pomocnou ruku, když jsme ji potřebovali. Dále děkujeme také ostatním účastníkům soustředění, kteří v průběhu projevili zájem o náš projekt a mnohdy i poradili s dalším postupem.

Úvod

Co je to Dobble?

Dobble je společenská hra většinou pro 2-8 hráčů. Běžná verze se skládá z 55 hracích karet, na kterých se vyskytuje 8 symbolů. Každá dvojice karet má pouze jeden společný symbol. Existuje však i mnoho jiných verzí s jinými počty symbolů na kartě. Tato hra se může hrát mnoha způsoby.

Základní variantou je tzv. „Pekelná věž“, která spočívá v odebírání karet ze společného balíčku. Každý hráč začíná s jednou kartou a další získává pomocí hledání společného symbolu na ostatních kartách. Karta, kterou si hráč přivlastní si pokládá na vrh svého balíčku a pokračuje s ní. Vyhrává hráč s největším počtem karet.

Historie

Poprvé s myšlenkou hry přišel roku 1976 francouzský nadšenec do matematiky Jacques Cottereau, který vymyslel hru o 31 kartách po šesti symbolech, kde se každá shodovala s každou další právě v jednom symbolu. Konkrétně hru vyrobil s obrázky hmyzu. V roce 2008 se tato hra dostala k novináři a hernímu designerovi Denisi Blanchotovi, který stejného principu využil k vytvoření hry Dobble, jak ji známe dnes. Hra byla poprvé vydána ve Francii a postupně se rozšířila do celého světa.

Náš plán

Cílem našeho projektu bylo hlavně pochopit, jak funguje matematika za touto hrou, a použít naše nově nabyté znalosti v praxi, tedy vytvořit svou vlastní verzi hry.

Matematika za Dobble

Projektivní roviny

Nejdříve jsme se museli pochopit projektivní roviny, které se hrou Dobble úzce souvisí.

Projektivní rovina je množina přímek a bodů, ve které platí určité axiomy. Tyto axiomy ještě blíže vysvětlíme. V našem projektu jsou velice důležité, neboť zmíněné body a přímky fungují stejně jako karty a symboly ve hře. K lepšímu pochopení jsme zde vypsali, jak budeme značit body a přímky v celé dokumentaci:

$$množina\ přímek \dots \dots\ \mathrm{K}\ (jako\ množina\ karet)$$

$$přímky \dots \dots\ K_1, K_2 \dots K_n\ (jako\ jednotlivé\ karty)$$

$$množina\ bodů \dots \dots\ S\ (jako\ množina\ symbolů)$$

$$body \dots .\ s_1, s_2 \dots s_n\ (jako\ jednotlivé\ symboly)$$

$$projektivní\ rovina \dots (S, \mathrm{K})$$

Axiomy jsou pravidla, kterými se musíme řídit, pokud chceme vytvořit funkční hru.

V projektivní rovině platí následující axiomy:

(A1) Každé dvě přímky (karty) $K, L\ \in\ \mathrm{K}$ mají právě jeden společný bod (symbol), tj. $|K\ \cap\ L|\ =\ 1.$

Tento axiom nám zaručuje, že na libovolné dvojici karet bude právě jeden společný symbol.

(A2) Pro každé dva body (symboly) $s, t\ \in\ S$ existuje právě jedna přímka (karta) $K\ \in\ K$,

pro kterou $s, t\ \in\ K$.

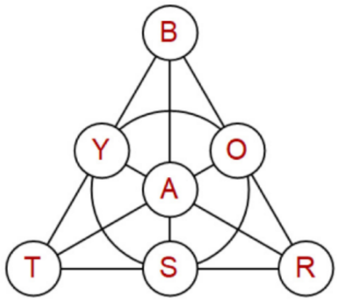
Druhý axiom nám říká, že pro libovolnou dvojici symbolů existuje právě jedna karta, kde jsou oba dva

(A3) existuje množina čtyř symbolů $M\ \subset\ S$, z nichž žádné tři se nevyskytují na stejné kartě,

tj. $|M\ \cap\ K|\ \leq\ 2$ pro všechny karty $K\ \in\ \mathrm{K}$.

Tento axiom říká, že pro množinu 4 symbolů se na jedné kartě nebudou vyskytovat více než 2 symboly z této množiny. My usilujeme o to, abychom měli stejný počet symbolů na každé kartě a tedy byla hra spravedlivá. Tento axiom nám právě eliminuje případ, kdyby se všechny přímky potkaly v jednom bodě nebo naopak všechny body ležely na stejné přímce a zároveň zařídí aby na každé přímce (kartě) byl stejný počet bodů (symbolů). Všechny důkazy a podrobnější vysvětlení proč to takto funguje najdete v dokumentech, které jsou vypsány ve zdrojích.

$$\mathcal{K} = \{BYT, OBR, OSY, ARY, BAS, TRS, TAO\}.$$



	BYT	OBR	OSY	ARY	BAS	TRS	TAO
S			1		1	1	
R		1		1		1	
A				1	1		1
B	1	1			1		
O		1	1				1
Y	1		1	1			
T	1					1	1

Obrázek 1 Fanova rovina

Na obrázku můžete vidět konečnou projektivní rovinu řádu 2 známou také jako Fanova rovina.

U projektivních rovin můžeme definovat různé řády. My si tyto řády označíme n. V našem případě řády využijeme k určení počtu symbolů na kartě, počtu karet (tedy všech možných kombinací), počtu symbolů celkově, které budeme potřebovat i počtu karet, na kterých se bude vyskytovat jeden daný symbol.

Během projektu jsme se dozvěděli a pomocí důkazů nám bylo i potvrzeno, že počet symbolů na jedné hrací kartě se rovná hodnotě n zvětšené o 1 (tedy $n + 1$). Tedy například pokud bychom měli projektivní rovinu řádu 3 ($n = 3$), znamená to, že počet symbolů na kartách bude 4. Když jsme bádali dále, bylo nám prozrazeno a později dokázáno, že tento počet symbolů na kartě se rovná též počtu karet, na kterých se vyskytuje stejný symbol, a zároveň, že celkový počet symbolů je stejný jako celkový počet karet. Tento jev, který jsme právě popsali, vychází z jedné ze zajímavých vlastností projektivních rovin, který se nazývá dualita. Zjednodušeně to znamená, že se dají prohazovat prohodit přímky za body a naopak (např. počet symbolů se právě bude rovnat počtu karet).

Celkový počet karet či symbolů zjistíme pomocí následujícího vzorce: $n^2 + n + 1.$ Tedy pokud bychom použili opět projektivní rovinu řádu 3 ($n = 3$) tak bychom zjistili, že potřebujeme 13 symbolů a získáme 13 různých karet po 4 symbolech.

Důkazy k těmto vzorcům a širší vysvětlení se dá opět najít v dokumentech, na něž je odkaz ve zdrojích.

Důležité je také zmínit, že ne pro každé n existuje konečná projektivní rovina, ale bylo dokázáno, že existuje pro mocniny prvočísel. Dokonce existuje domněnka, že jde udělat projektivní rovina pouze u mocnin prvočísel(např. 2,3,4 atd.) V následující tabulce je vypsáno, pro které n to jde.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Existuje	ano	ano	ano	ano	Ne	ano	ano	ano	ne	ano

Větším problémem však je zjistit jaké symboly dát na jaké karty, tak aby se neopakovaly a aby všechny karty měly jen jeden stejný symbol s každou další kartou. Toho jsme dosáhli použitím incidenčních matic, které vysvětlíme blíže v následující kapitole.

Incidenční matice

K přiřazení symbolů na kartu je možné použít tzv. Incidenční matici. Jedná se o matici $m \times m$ vyplněnou jedničkami a nulami, přičemž pokud leží symbol (v řádku) na kartě(sloupci) napíšeme jedničku a jinak napíšeme nulu. Tato matice však není jednoznačně určena. Proto použijeme speciální případ, tzv. "kanonickou incidenční matici" Ta se řídí těmito pravidly:

(I1) symboly $s_1, \ldots, s_{n+1}$leží na kartě K_1;

(I2) symbol s_1 leží na kartách $K_1, \ldots, K_{n+1}$;

(I3) symboly $s_{kn+2}, \ldots, s_{kn} + n + 1$ leží na kartě $K_k + 1\ pro\ k\ =\ 1, \ldots, n$;

(I4) symbol s_{k+1} leží na kartách $K_{kn+2}, \ldots, K_{kn+n+1}$ pro $k\ =\ 1, \ldots, n$;

(I5) podmatice $P1k\ =\ I[n\ +\ 2, \ldots, 2n\ +\ 1|kn\ +\ 2, \ldots, kn\ +\ n\ +\ 1]$ jsou jednotkové matice řádu n pro $k\ =\ 1, \ldots, n$;

Značení v hranatých závorkách znamená, které řádky a sloupce zachováváme, toto pravidlo nám zanechá volné místo na možné ruční vyplňování, které nám pravidla kanonické incidenční matice neurčují.

(I6) podmatice $Pk1\ =\ I[kn\ +\ 2, \ldots, kn\ +\ n\ +\ 1|n\ +\ 2, \ldots, 2n\ +\ 1]$ jsou jednotkové matice řádu n pro $k\ =\ 2, \ldots, n$;

I když tato pravidla určují většinu matice, vždy zbyde v pravém dolním rohu oblast, kterou musíme zaplnit pomocí permutačních matic.

Pokud existuje konečná projektivní rovina je možné vytvořit incidenční matici.

Permutační matice

Jde o matice obsahující v každém řádku a sloupci právě jednu jedničku a zbytek je vyplněn nulami. Tyto objekty lze popsat kanonickou bází R^n:

$$e \ldots\ldots báze$$

$$e_1 = (1; 0; 0; \ldots);\ e_2 = (0; 1; 0; 0; \ldots);\ e_3 = (0; 0; 1; 0; \ldots); \ldots$$

Permutační matice pro naši incidenční matici je možné vytvořit za pomoci latinských čtverců, kterým budeme věnovat pozornost později.

Latinské čtverce

Latinské čtverce jsou matice $n \times n$ s n různými symboly, které se neopakují ve sloupci ani v řádku.

$$L_4 = \begin{pmatrix} \clubsuit & \spadesuit & \diamondsuit & \heartsuit \\ \spadesuit & \diamondsuit & \heartsuit & \clubsuit \\ \diamondsuit & \heartsuit & \clubsuit & \spadesuit \\ \heartsuit & \clubsuit & \spadesuit & \diamondsuit \end{pmatrix}$$

Obrázek 2 Latinský čtverec

Nás budou konkrétně zajímat ortogonální latinské čtverce. To jsou ty, které když spojíme, tak že napíšeme první pozici k první, druhou pozici k druhé, ..., tak vytvoříme všechny možné (orientované) dvojice právě jednou.

$$L_4 = \begin{pmatrix} \clubsuit & \spadesuit & \diamondsuit & \heartsuit \\ \spadesuit & \clubsuit & \heartsuit & \diamondsuit \\ \diamondsuit & \heartsuit & \clubsuit & \spadesuit \\ \heartsuit & \diamondsuit & \spadesuit & \clubsuit \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}_4 = \begin{pmatrix} \text{♪} & \text{𝅗𝅥} & \sharp & \flat \\ \sharp & \flat & \text{♪} & \text{𝅗𝅥} \\ \flat & \sharp & \text{𝅗𝅥} & \text{♪} \\ \text{𝅗𝅥} & \text{♪} & \flat & \sharp \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \clubsuit\text{♪} & \spadesuit\text{𝅗𝅥} & \diamondsuit\sharp & \heartsuit\flat \\ \spadesuit\sharp & \clubsuit\flat & \heartsuit\text{♪} & \diamondsuit\text{𝅗𝅥} \\ \diamondsuit\flat & \heartsuit\sharp & \clubsuit\text{𝅗𝅥} & \spadesuit\text{♪} \\ \heartsuit\text{𝅗𝅥} & \diamondsuit\text{♪} & \spadesuit\flat & \clubsuit\sharp \end{pmatrix}$$

Obrázek 3 Ortogonální latinské čtverce

Lze dokázat, že existuje alespoň jeden a maximálně $(n-1)$ ortogonálních latinských čtverců.

Incidenční matice a konečná projektivní rovina

Pokud máme $n-1$ vzájemně ortogonálních latinských čtverců můžeme vytvořit projektivní rovinu (incidenční matici).

Na základě komponentů latinských čtverců definujeme permutační matice podle vzorce:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} e_{l_{i1}^{j-1}} \\ e_{l_{i2}^{j-1}} \\ \cdots \\ e_{l_{in}^{j-1}} \end{pmatrix}$$

Obrázek 4 Vzorec Permutační matice

Díky příhodným vlastnostem ortogonálních latinských čtverců budou permutační matice a celá incidenční matice splňovat axiomy konečné projektivní roviny (což bylo v článku dokázáno). Tím pádem máme strukturu hry Dobble s maticí, díky které můžeme přesně přiřadit symboly kartám.

Vlastní výroba

Abychom mohli vyzkoušet tuto teorii v praxi, pokusili jsme se o vytvoření i našeho vlastního výrobku, který jsme nazvali SMFMle. Funguje však na úplně stejném principu jako běžná hra Dobble a má stejná pravidla. Vytvořili jsme 2 verze, první pro vycházející z projektivní roviny řádu 4 a druhou pro řád 8.

1. Projektivní rovina řádu 4

Nejdříve jsme se učili jak sestavit matici pro řád 3 a až poté se vrhli na incidenční matici řádu 4. Jako první jsme si určili pomocí vzorců počty karet a symbolů, které budeme potřebovat k vytvoření matice i hry jako takové.

Pro projektivní rovinu řádu 4 potřebujeme:

Celkový počet karet	21
Celkový počet symbolů	21
Počet symbolů na kartě	5
Počet karet, na kterých se objevuje daný symbol	5

Na obr. 5 je ukázka incidenční matice, kterou jsme si vytvořili a použili na vytvoření naší hry.

Je to typická matice složená z jedniček a nul, kde jedničky říkají, že daný symbol na kartě je a nuly, že daný symbol na kartě není.

Na vodorovné ose jsou karty A až U a na svislé ose symboly 1 až 21.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	
5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	
6	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	
7	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	
8	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	
9	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	
10	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	
11	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	
12	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	
13	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	
14	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	
15	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	
16	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	
17	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	
18	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	
19	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	
20	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	
21	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	
22																						

Obrázek 5 Projektivní rovina řádu 4

Obrázek 6 Ukázka A

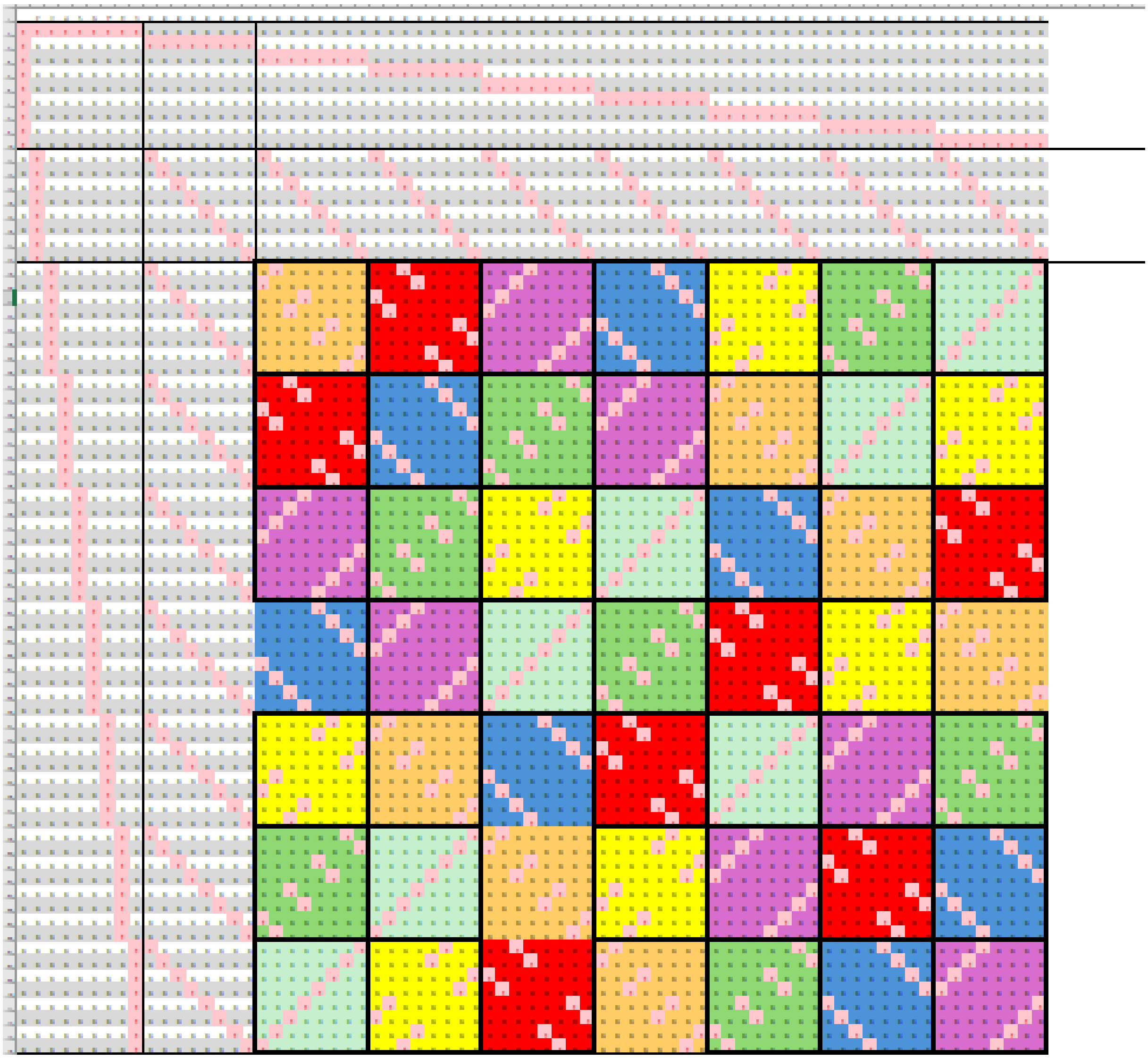
Obrázek 7 Ukázka B

2. Projektivní rovina řádu 8

Jako finální projekt jsme si zvolili projektivní rovinu řádu 8. Běžný Dobble má řád 7 a tudíž jsme se rozhodli udělat hru pro trochu více lidí a trochu těžší. Po několika zkušebních kolech s pomocí ostatních účastníků tábora jsme vyhodnotili průměrnou hrací dobu základní varianty hry na 5 minut.

Celkový počet karet	73
Celkový počet symbolů	73
Počet symbolů na kartě	9
Počet karet, na kterých se objevuje daný symbol	9

Incidenční matice řádu 8 mnohonásobně větší a tudíž vytvořit ji nám zabralo více času. Nakonec nám však vyšla a vypadá takto:



Obrázek 8 Projektivní rovina řádu 8

Na této matici vysvětlím jak jsme postupovali. Na prvních 17 sloupců i řádků jsme použili výše zapsaná pravidla, která jsou stejná pro všechny matice. Kde to začíná být zajímavé jsou až tučně vyznačené barevné čtverce. Ty se tvoří pomocí, také již zmíněných, latinských čtverců a permutační matice. Různé barvy ukazují stejné kombinace v rámci čtverců. Také si můžeme všimnout, že jsou přesně symetrické podle úhlopříčky vedoucí od levého horního rohu do pravého spodního.

A pak jsme se už mohli pustit do tvorby jako takové. První verzi jsme se rozhodli udělat na karton a druhou jsme původně chtěli tisknout na čtvrtky, avšak nakonec jsme zvolili stejný postup jako u první verze.

Nejdříve jsme si vytvořili 73 kartonových destiček s rozměry 10 cm x 7 cm (v první verzi jsme užili rozměrů 7 cm x 7 cm). Poté jsme si vytvořili 146 „papírků“ z normálního papíru, kde 73 z nich jsou zadní strany a kartiček s logem a 73 z nich jsou předními stranami se symboly. Tyto „papírky“ jsme následně nalepili předpřipravený karton a tím jsme měli hotovou funkční hru SMFMle.

Zde jsou nějaké fotky z průběhu vytváření naší hry.






Obrázek 9 Karty SMFMle

Závěr

V našem projektu jsme se věnovali hře Dobble a vyzkoušeli si proces výroby této hry. Začali jsme matematikou, která nám prozradila jaké symboly vkládat na jaké karty. Po sestavení incidenční matice jsme se od teoretické části přesunuli k praktické, neboli k samotné výrobě kartiček. Kartičky jsme dělali z kartonu ruční výrobou a tématika symbolů na nich byla inspirována soustředěním mladých fyziků a matematiků. Projekt by se dal ještě rozšířit o variantu hry, kde by každé dvě karty měli dva společné symboly, či by hráč musel najít trojice.

Zdroje

Salgado, Cecilia. "The geometry of the game Dobble." [online 10. 7. 2024] Dostupné z: https://www.uu.nl/sites/default/files/Cecilia%20Salgado%20HandoutNWD2022.pdf

Stehlík, Petr. "Matematika za karetní hrou dobble." Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 64.2 (2019): 69-90. [online 10. 7. 2024] Dostupné z: http://eudml.org/doc/294188