

Soustředění mladých fyziků a matematiků
Nekoř 2023

Měření velikosti ústové
rychlosti vzduchovky

Autoři: Petra Mrázková, Richard Dobíšek, Vojtěch Procházka
Vedoucí projektu: Mgr. Jaroslav Reichl

Prohlašujeme, že jsme práci s názvem „Měření velikosti ústové rychlosti vzduchovky“ vypracovali samostatně a čerpaly pouze z uvedené literatury a dalších zdrojů.

Anotace

Cílem projektu bylo vytvořit metody pro měření ústové rychlosti vzduchovky Crosman Benjamin Trail Mark II NP, následně je realizovat a srovnat jejich přesnosti. Do projektu jsme zahrnuli také odvození potřebných vztahů pro určení velikosti rychlosti.

Poděkování

Chtěli bychom poděkovat našemu vedoucímu Mgr. Jaroslavu Reichlovi za střelbu, fotodokumentaci a pomoc při měření a také za cenné rady a konzultace k našemu projektu. Dále děkujeme všem, kteří se podílí na realizaci a organizaci Soustředění mladých fyziků a matematiků.

Obsah

1 Úvod.....	6
2 Crosman Benjamin Trail Mark II NP.....	7
3 Měření dle brzdné dráhy vozíku.....	8
3.1 Měření koeficientu odporu.....	8
3.2 Odvození vztahu pro určení ústové rychlosti.....	10
3.3 Měření ústové rychlosti vzduchovky.....	12
4 Měření pomocí kyvadla.....	14
4.1 Odvození vztahu pro určení ústové rychlosti.....	14
4.1 Měření ústové rychlosti vzduchovky.....	16
5 Měření dle úhlové odchylky na dvou rotujících terčích.....	18
5.1 Způsob měření.....	18
5.2 Odvození vztahu pro určení ústové rychlosti.....	19
5.3 Měření velikosti rychlosti.....	20
5.4 Pozorování a chyby v měření.....	22
6 Měření pomocí rychloběžné kamery.....	24
7 Závěr.....	26
Zdroje.....	27

1 Úvod

Vzduchovka je věc, kterou skoro každý z nás zná. Snad každý z ní někdy zkoušel střílet, ať už do plechovek nebo na terč. Ale zábava je to nebezpečná a při špatném používání může taková vzduchovka dost ublížit. Diabolky z ní létají dost rychle, ale jak rychle? To se pokoušíme zjistit.

Naším cílem bylo pokusit se změřit ústovou rychlost vzduchovky. Rozhodli jsme se vyzkoušet několik různých metod, abychom získali co nejpřesnější výsledek. Cíl byl nejprve vymyslet několik metod, které by mohli být realizovatelné. Poté odvodit potřebné rovnice a následně je v praxi zkusit, abychom ověřili jejich přesnost a jak moc jsou praktické pro tento účel. Neboť ne u všeho platí, že když se to jeví funkční v teorii, tak že to platí i v praxi, jak jsme také sami zjistili.

2 Crosman Benjamin Trail Mark II NP

Používali jsme vzduchovku Crosman Benjamin Trail Mark II NP o ráži 4,5 mm. Její hlaveň má délku 185 mm, celkově dosahuje 406 mm. Má hmotnost 1560 g. Používá NITRO píst. Se zbraní je přibaleno i prodlužovací adaptér pro lámání, který jsme nepoužívali. Výrobce uvádí ústovou rychlost jako 160 m/s, kterou se snažíme otestovat.



Obrázek 1: Vzduchovka Crosman Benjamin Trail Mark II NP

Stříleli jsme s olověnými diabolkami JSB EXACT 4,50 mm. Každá váží 0,547 g.



Obrázek 2: Diabolky

3 Měření dle brzdě dráhy vozíku

3.1 Měření koeficientu odporu

Pro změření koeficientu odporu ocelových koleček ze stavebnice Merkur pohybujících se po hliníkové desce jsme používali siloměr Vernier, na nějž byl připojen vozík se závažím. Odporovou sílu jsme se nejprve pokoušeli změřit na vodorovné rovině, když jsme se vozík snažili táhnout tak, aby se pohyboval rovnoměrným přímočarým pohybem. Avšak její hodnoty byly příliš malé, proto by bylo měření velmi nepřesné.

Pro zvětšení naměřených hodnot jsme tedy pak vozík táhli na siloměru rovnoměrným přímočarým pohybem vzhůru po nakloněné rovině. Na základě měření jsme určili koeficient odporu β kol vozíku při pohybu na hliníkové desce, který odpovídá poměru ramena valivého odporu ξ a poloměru kol vozíku R .

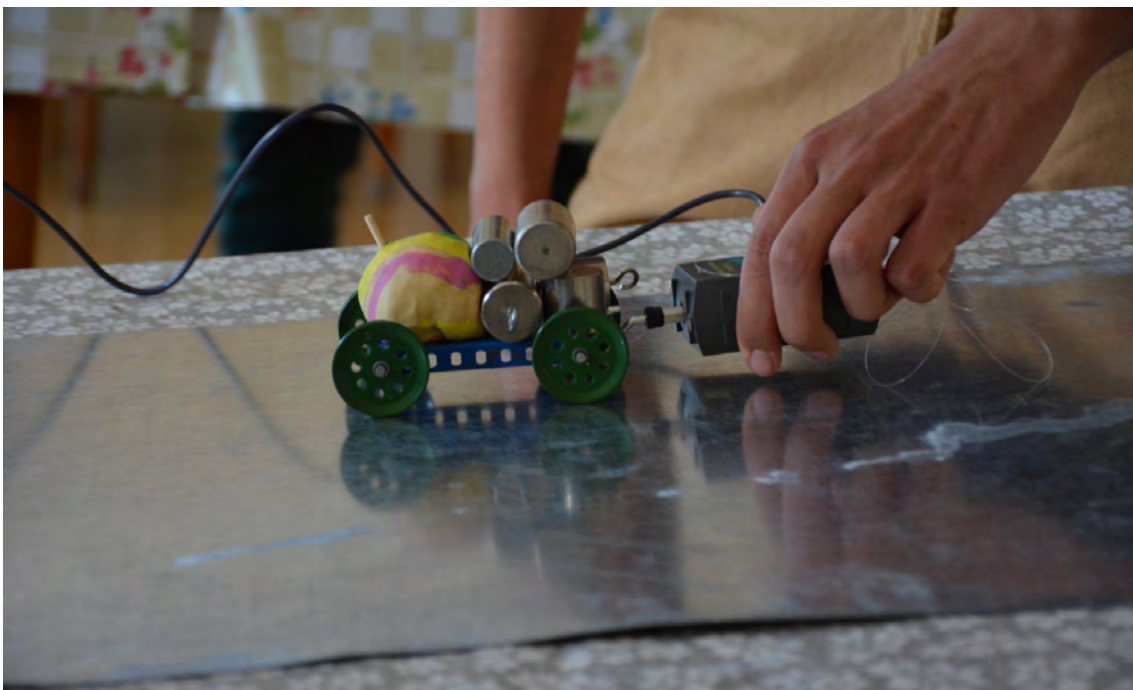
Při tažení vozíku vzhůru po nakloněné rovině působí proti jeho směru pohybu odporová síla F_v kvůli deformaci podložky a složka F_x tíhové síly rovnoběžná s nakloněnou rovinou, pro níž platí $F_x = mgsin(\alpha)$. Velikost odporové síly odpovídá součinu koeficientu odporu β a složky F_y tíhové síly kolmé na nakloněnou rovinu, pro níž platí $F_y = mgcos(\alpha)$. Siloměrem jsme měřili velikost tahové síly F působící ve směru pohybu vozíku. Její velikost odpovídá součtu velikostí sil F_v a F_x . Pro koeficient odporu β pak platí:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_v + \vec{F}_x \\ F &= \beta mgcos(\alpha) + mgsin(\alpha) \\ \beta &= \frac{F - mgsin(\alpha)}{mgcos(\alpha)} \\ \beta &= \frac{F}{mgcos(\alpha)} - tg(\alpha)\end{aligned}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_v [N]	1,57	1,49	1,55	1,51	1,52	1,54	1,56	1,53	1,54	1,45	1,47

Tabulka 1: Velikost odporové síly

Velikost odporové síly jsme určili na základě naměřených dat jako $F_v = 1,52 \pm 0,04 \text{ N}$. Z naměřených dat jsme koeficient odporu (poměr ramena valivého odporu a poloměru kol) pro ocelová kolečka ze stavebnice Merkur na hliníkové desce určili jako $\beta = 0,0298$.



Obrázek 3: Měření odporové síly

3.2 Odvození vztahu pro určení ústové rychlosti

Touto metodou jsme měřili velikost ústové rychlosti vzduchovky podle délky brzdné dráhy vozíku o hmotnosti M , do nějž vystřelená diabolka o hmotnosti m narazí. Na počátku je vozík v klidu, proto celková hybnost p soustavy odpovídá hybnosti p_1 diabolky. Ze zákona zachování hybnosti pak vyplývá, že tato hybnost odpovídá celkové hybnosti p' po jejich jejich srážce, tedy součtu hybností diabolky p_1' a vozíku p_2' . Za předpokladu, že při srážce se diabolka a vozík spojí a ihned po srážce se budou pohybovat společně rychlostí v_2 původním směrem diabolky, platí pro původní rychlost v_1 diabolky:

$$\begin{aligned} p &= p' \\ p_1 &= p_1' + p_2' \\ m v_1 &= v_2 (m + M) \\ v_1 &= \frac{v_2 (m + M)}{m} \end{aligned}$$

Kinetická energie vozíku s diabolkou E_k se zmenšuje až do úplného zastavení (dosazení rychlosti $v_k = 0 \text{ m s}^{-1}$) vlivem odporové síly F_v , která působí proti směru pohybu vozíku. Velikost této síly odpovídá součinu koeficientu odporu β pro ocelová kolečka na hliníkové desce a velikosti tlakové síly, kterou zde představuje síla tíhová působící na diabolku a vozík. A tedy platí:

$$\begin{aligned} \Delta E_k - F_v s &= 0 \\ \Delta E_k - \beta (M + m) g s &= 0 \end{aligned}$$

Z čehož vyplývá, že rychlost v_2 vozíku s diabolkou po srážce je:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_k^2) &= F_v s \\ v_2 &= \sqrt{\frac{2 F_v s}{m + M}} \\ v_2 &= \sqrt{2 s \beta g} \end{aligned}$$

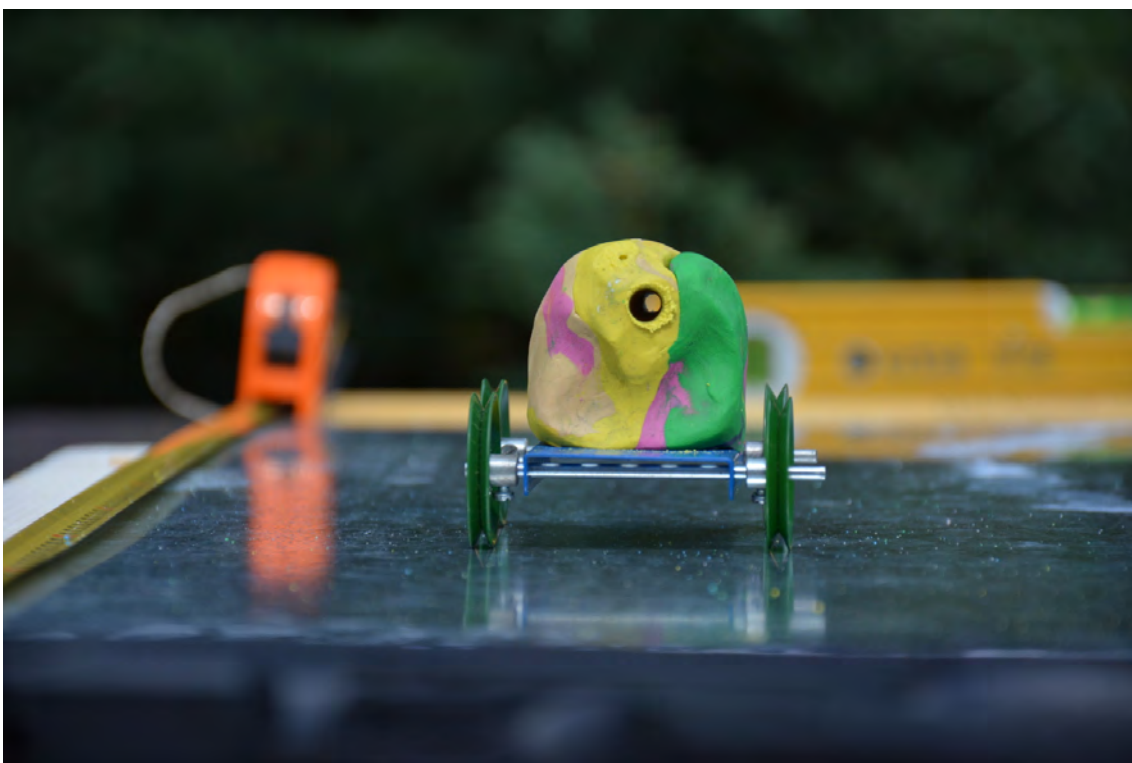
Při dosazení pak velikost ústové rychlosti v_1 je:

$$v_1 = \frac{\sqrt{2s\beta g}(m+M)}{m}$$

V odvozeném vztahu byl zanedbán odpor vzduchu a zakřivení trajektorie diabolky.

3.3 Měření ústové rychlosti vzduchovky

U této metody jsme měřili brzdou dráhu vozíku, do nějž narazila vystřelená diabolka a na základě naměřených hodnot jsme vypočítali velikost ústové rychlosti vzduchovky. Použili jsme ocelový vozík ze stavebnice Merkur, který se pohyboval po hliníkové desce. Na vozíku byla špejlí připevněna modelína, která však nebyla dostatečně pevná, aby diabolka neproletěla skrz.



Obrázek 4: První střelba do modelíny, která nezadržela diabolku

Proto jsme při dalších pokusech do modelíny vložili dřevěnou destičku o rozměrech přibližně $3 \times 3 \times 0,7$ cm, jež zachytávala vystřelené diabolky ze vzdálenosti přibližně 10 cm. Destičkou už diabolky neprolétly, ale po čtyřech pokusech jsme ji museli vyměnit. Na základě naměřených hodnot jsme pak vypočítali velikost ústové rychlosti se zanedbáním odporu vzduchu.



Obrázek 5: Měření velikosti rychlosti dle brzdné dráhy vozíku

Velikost ústové rychlosti vzduchovky byla na základě výpočtu z naměřených hodnot určena jako $v_1 = 212,6 \pm 9,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $\delta = 4,3 \%$.

s [cm]	m+M [g]	v [m/s]
34,4	261,69	214,6
33,5	261,68	211,7
34,7	261,50	215,3
29,9	262,45	200,6
29,8	262,99	200,7
39,3	263,47	230,9
31,4	264,01	206,8
31,0	264,00	205,5
35,3	264,43	219,6
35,5	264,44	220,2

Tabulka 2: Měření velikosti rychlosti dle brzdné dráhy vozíku

4 Měření pomocí kyvadla

4.1 Odvození vztahu pro určení ústové rychlosti

Touto metodou jsme měřili velikost ústové rychlosti na základě maximální výchylky kyvadla, do něž narazila diabolka. Na počátku je kyvadlo o hmotnosti M v klidu, proto jeho hybnost p_2 nulová. Celková hybnost soustavy tedy odpovídá hybnosti p_1 diabolky, která se pohybuje rychlostí v_1 . Za předpokladu, že se diabolka z závažím kyvadla při srážce spojí, bude se po srážce celá soustava o hmotnosti $M + m$ pohybovat s hybností $p' = p_1' + p_2' = v_2 (M + m)$. Pro rychlost v_1 tedy platí:

$$\begin{aligned} p &= p' \\ p_1 + p_2 &= p_1' + p_2' \\ m \cdot v_1 &= v_2 \cdot (M + m) \\ v_1 &= \frac{v_2 \cdot (M + m)}{m} \end{aligned}$$

Ze zákona zachování mechanické energie platí, že hodnota součtu kinetické a potenciální energie soustavy je konstantní. Ihned po srážce je potenciální energie soustavy E_{p2} nulová, celková mechanická energie soustavy tedy odpovídá kinetické energii $E_{k2} = \frac{1}{2} (m + M) \cdot v_2^2$. Poté se kinetická energie přeměňuje na potenciální, dokud kyvadlo nedosáhne rychlosti $v_3 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a maximální výšky $h = l \cdot (1 - \cos \varphi)$, kde l je délka závěsu a φ je úhel, o který se kyvadlo vychýlilo. Pak je tedy kinetická energie E_{k3} nulová a celková mechanická energie soustavy odpovídá potenciální energii. Pro rychlost v_2 tedy platí:

$$\begin{aligned} E_{k2} + E_{p2} &= E_{k3} + E_{p3} \\ \frac{1}{2} (m + M) v_2^2 &= (m + M) gh \\ v_2 &= \sqrt{2gl(1 - \cos \varphi)} \end{aligned}$$

Při dosazení do prvního vztahu lze velikost rychlosti v_1 určit jako:

$$v_1 = \frac{(m+M) \cdot \sqrt{2gl(1-\cos\varphi)}}{m}$$

V odvozeném vztahu byl zanedbán odporu vzduchu, zakřivení trajektorie diabolky a závěs je uvažován jako nehmotný.

4.1 Měření ústové rychlosti vzduchovky

U této metody jsme měřili maximální výchylku kyvadla o hmotnosti M , do nějž narazila diabolka o hmotnosti m . Nejprve byl na kyvadle jako závaží zavěšen hliníkový plíšek k zachycení vystřelené diabolky. Plíšek byl obalen modelínou, kterou jsme smíchali s pískem, aby lépe držela tvar i při vysokých letních teplotách. Po dvou pokusech byl plíšek prostřelen, proto jsme do modelíny přidali další dva hliníkové plíšky a jeden měděný. U kyvadla jsme použili dvojitý závěs, kdy provázky byly připevněny k dvěma horním rohům plíšku a směrem vzhůru se rozšiřovaly pro zvýšení stability závaží kyvadla ve vodorovném směru. Na závaží kyvadla, v místě



Obrázek 6: Zavěšení kyvadla z pohledu rychloběžné kamery

závěsu a za závěs na dřevěnou latku jsme umístili proužky z papíru ve výrazných barvách pro usnadnění odečítání úhlové výchylky ze záznamu. Vedle kyvadla jsme umístili rychloběžnou kameru tak, aby směřovala kolmo ke směru pohybu zavěšeného závaží.

Při každém pokusu vystřelili do závaží kyvadla z co nejmenší vzdálenosti a tak, aby bylo pouzdro vzduchovky rovnoběžné s vodorovnou

rovinou. Ze záznamů jsme poté odečetli maximální úhlovou výchylku kyvadla po srážce s diabolkou. Z naměřených hodnot jsme vypočítali úhlovou rychlost se zanedbáním odporu vzduchu a závěs byl uvažován jako nehmotný.



Obrázek 7: Měření velikosti rychlosti dle úhlové výchylky kyvadla

Velikost ústové rychlosti vzduchovky byla na základě výpočtu z naměřených hodnot určena jako:

$$v_1 = 173,1 \pm 13,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \delta = 7,7\%.$$

$m+M$ [g]	φ [°]	l [cm]	v_1 [m/s]
187	9	131,8	193,5
230	6,8	132,5	180,2
232,6	6,5	132,5	174,2
233,6	6	132,5	161,5
233,6	5,8	132,5	156,2

Tabulka 3: Měření velikosti rychlosti dle úhlové výchylky kyvadla

5 Měření dle úhlové odchylky na dvou rotujících terčích

5.1 Způsob měření

Rychlost diabolky změříme pomocí dvou papírových kruhů rotujících kolem rovné tyče.



Obrázek 8: Terče připevněné k závitové tyči

Tyč je připevněná na vrtačku se známou úhlovou rychlostí. Střelíme do prvního rotujícího kruhu a než diabolka strefí druhý kruh, tak se ten druhý kruh pootočí o nějaký úhel a z toho už jednoduše spočítáme průměrnou rychlost mezi dvěma kruhy.

5.2 Odvození vztahu pro určení ústové rychlosti

Kulka vystřelená z hlavně proletí prvním papírem a trefí druhý papír vzdálený s metrů za čas t sekund. Průměrnou rychlost tak určíme jako:

$$v = \frac{s}{t}$$

Vzdálenost s známe, čas t musíme spočítat. Kulka první proletí prvním diskem v čase 0 s a druhý disk trefí v čase t . Mezitím se druhý disk stihne pootočit o určitý úhel φ . φ spočítáme jako úhlovou rychlost kruhu vynásobenou časem t . Úhlová rychlost je podíl 2π a periody otáčení T . Tedy dostáváme:

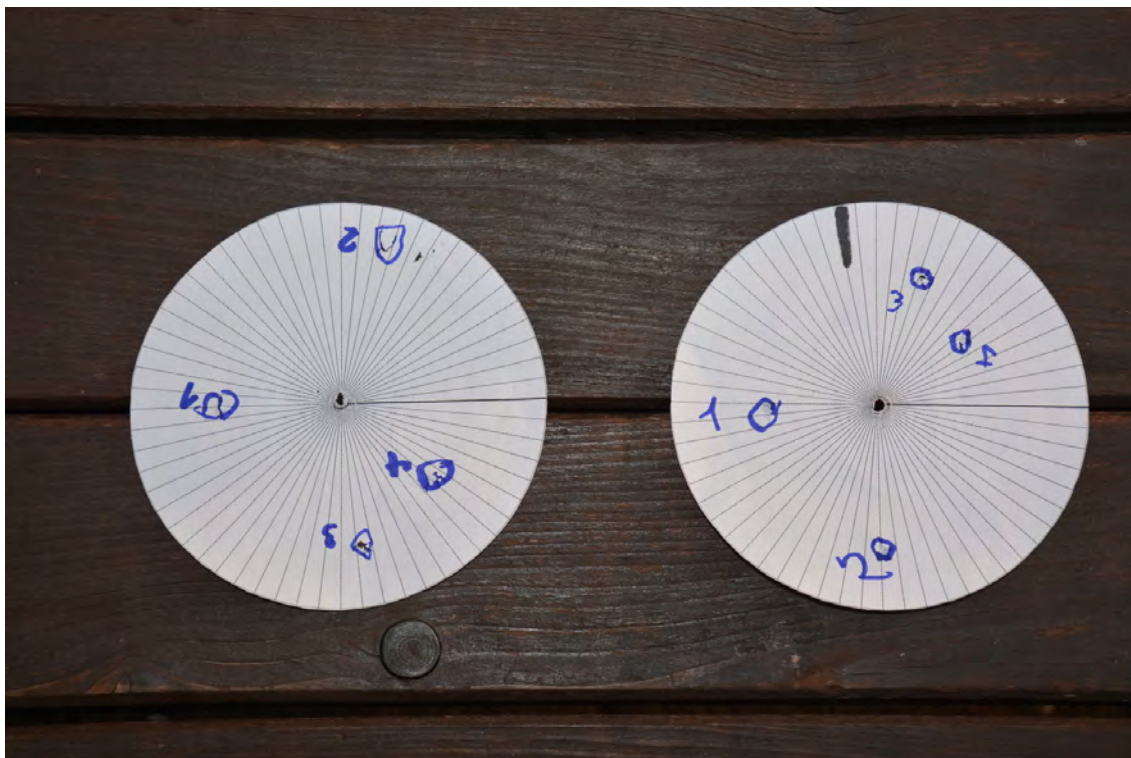
$$\varphi = \omega \cdot t = \frac{2\pi t}{T} \Leftrightarrow \frac{1}{t} = \frac{2\pi}{T\varphi}$$

Na závěr dosadíme do vztahu pro rychlost:

$$v = \frac{2\pi s}{T\varphi}$$

5.3 Měření velikosti rychlosti

Na papírové kruhy jsme si předtiskli paprsky vedoucí ze středu kruhu odchýlené navzájem o 6 stupňů. Jeden paprsek na každém kruhu jsme zvýraznili a zarovnali je.



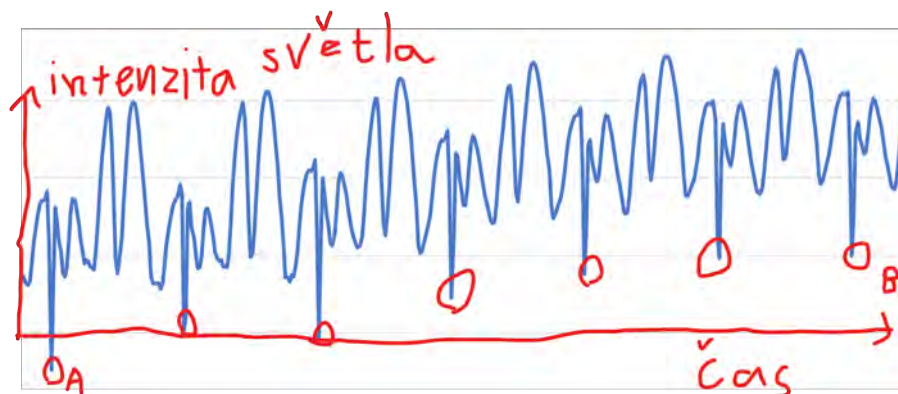
Obrázek 9: Prostřelené terče

Tyč jsme nasadili na akušroubovák na maximálním výkonu a střileli jsme z bezprostřední blízkosti. Periodu otáčení jsme pro každé měření zvlášť určovali pomocí luxmetru. Na otáčející se kruh jsem nakreslili tmavou čárku a luxmetr zaznamenal propad v intenzitě světla pokaždé když proběhla jedna otáčka. Z grafu byla odečtena perioda rotace a tak, že byl změřen časový úsek šesti period, který začínal v čase $t(A)$ a končil v čase $t(B)$ a tedy:

$$t(A) = 1.012095 \text{ s}$$

$$t(B) = 1.353625 \text{ s}$$

$$T = (t(B)-t(A))/6 = 0.34153/6 \text{ s} = 0.0569 \text{ s}$$



Obrázek 10: Náčrt grafu intezity světla

Samozřejmě dochází ke zpomalení kulky kvůli odporu papíru a odporu vzduchu. S odporem vzduchu nejsme schopni provádět výpočty, a protože je diabolka maličká a vzdálenost na které jsme se rozhodli měřit je krátká, tak jsme se rozhodli odpor vzduchu zanedbat.

Odpor papíru jsme chtěli spočítat tak, že dáme mnoho papírů za sebe a spočítáme kolik jich je potřeba na zastavení diabolky. 25 papírů nijak výrazně diabolku nezpomalilo, protože pokračovala ve své trajektorii, takže jsme se rozhodli odpor 1 papíru zanedbat.



Obrázek 11: Testování, zda dokáže několik vrstev papíru zastavit diabolku

5.4 Pozorování a chyby v měření

Provedli jsme 7 výstřelů a zaznamenali jsme tyto výsledky.

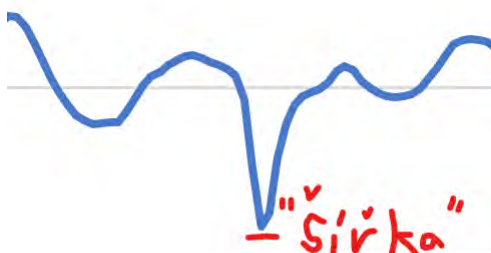
pozorování	s [cm]	$\Delta\varphi$ [°]	T [s]	v [m/s]
1	20	12	0.0558	107.5
2	20	6	0.0558	213.5
3	30	9	0.0558	215.1
4	30	16	0.0569	118.6
5	30	11	0.0562	174.7
6	20	3	0.0558	430.1
7	20	15	0.0562	86.0

Pozorování 6 a 7 jsme se rozhodli označit za irelevantní, protože u nich pravděpodobně došlo k velké chybě, a proto nedávají realistické výsledky. Průměrná rychlost nám tak vyšla jako 165,9 m/s.

Ve vztahu pro rychlost nám můžou vzniknout chyba v měření kvůli vzdálenosti mezi dvěma kruhy, chyba při určování periody otáčení kruhu (T), chyba při měření vzdálenosti mezi dvěma kruhy a hlavně nepřesnost při určování úhlu, o který se otočil druhý kruh.

Na měření s jsme použili milimetrový metr, takže nepřesnost by měla být $0.001/0.40 = 0.25\%$

Při určování T přesné určování souřadnice minima odpovídá „šířce“ minima:



Ta se pohybovala kolem $(1.102059-1.101226) \text{ s} = 8.33\text{e-}4$, chyba je tak $8.33\text{e-}4/0.0569 = 1.5\%$. Měření φ způsobí největší nepřesnost. Když odečítáme úhel, tak to zvládneme s přesností 3 stupně, což nám dává $3/16 = 18.75\%$ odchylku. Dohromady tak máme $0.25\% + 1.5\% + 18.75\% = 20.5\%$. Rychlost byla $165,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ s chybou 20,5%.

6 Měření pomocí rychloběžné kamery

Touto metodou jsme se snažili změřit rychlost vystřelené diabolky pomocí vzdálenosti, kterou střela uletí mezi dvěma snímky kamery. Vztah pro rychlost je:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Kde Δt odpovídá periodě snímků kamery a s je vzdálenost, kterou mezi snímky diabolka urazila. Rychlost jsme uvažovali jako konstantní, protože jsme zanedbali odpor vzduchu.

Pro měření jsme použili roli papíru, kterou jsme natáhli na zem a zatížili latěmi dřeva. Na papír jsme položili metr a vyznačili úseky po 10 cm. Shora natáčela kamera nastavena na 1200 snímků za sekundu. Měření probíhalo natáčením střely ze vzduchovky, kde jsme poté z videa odečetli vzdálenost, kterou náboj uletěl za 1 snímek.

Hlavní problém nastal u zpracování dat z měření. Ve videích šlo pozorovat mírné zachvění metru, pravděpodobně vzniklé výstřelem, ale nenašli jsme žádný snímek s diabolkou. Jako pravděpodobná vysvětlení považujeme buď naši vlastní chybu v hledání, nebo že na zachycení nebyla kamera dostatečně rychlá. Podle našich výpočtů by za dobu jednoho snímku měla diabolka urazit asi 20 cm, takže bychom ji měli zaznamenat.

Tento způsob měření rychlosti má výhodu, protože je velice jednoduchá a čerpá jen ze základního vztahu. Hlavní důvod, proč nebylo možné použít výsledky, byla rychlost kamery, která pro tyto účely nebyla dostatečně velká. Kdybychom měli rychlejší kameru, tak bychom tuto metodu nejspíše mohli použít, ale se současnými podmínkami to není ta nejlepší volba.



Obrázek 12: Měření pomocí rychloběžné kamery

7 Závěr

Závěrem považujeme náš projekt za úspěšný, přestože všechny metody nejsou zcela přesné a nedosáhli jsme u všech metod požadované přesnosti. Podařilo se nám určit velikost rychlosti dle brzdě dráhy vozíku, z maximální výchylky kyvadla a z úhlové odchylku průstřelů na rotujících tercích. Ze záznamu rychloběžné kamery bohužel nešlo odečíst žádné hodnoty. Za nejpřesnější metodu považujeme měření dle výchylky kyvadla, u níž jsme se dostali k rychlosti $173,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, která se příliš neodlišuje od hodnoty udávané výrobcem.

Zdroje

1. SVOBODA, Emanuel a kol. *Přehled středoškolské fyziky*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2006. ISBN 80-7196-307-0.
2. REICHL, Jaroslav. *Valivý odpor :: MEF* [online]. c2023 [cit. 2023-07-08]. <<http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/37-valivy-odpor>>.