Simulace v Excelu

Soustředění mladých matematiků a fyziků

Nekoř 2023

Autor: Alexandra Seďová

Vedoucí: Mgr. Jaroslav Reichl

1.7. – 15.7. 2023

Anotace

Tento projekt se zabývá metodou simulace reálných pohybů v životě pomocí programu Excel. Zmíněná metoda částečně vychází ze článku publikovaného jako součást studijních textů Fyzikální olympiády, a to konkrétně *„Modelování fyzikálních dějů numerickými metodami“*. Dále také vychází z velké části z jejího zpracování a zjednodušení Mgr. Jaroslavem Reichlem.

Cílem tohoto projektu je ukázat, že běžné fyzikální problémy řešené ve školách, zejména jejich průběh, který není možné se schopnostmi běžného středoškolského studenta vypočítat, lze zpracovat pomocí dané metody poměrně jednoduše a bez potřebného využití náročnějších matematických aparátů.

Contents

Poděkování

Chtěla bych poděkovat svému vedoucímu projektu, Jardovi, za jeho ochotu se mnou určité části projektu procházet a pomáhat mi během jejich řešení. Jeho pomoc byla neopominutelnou součástí této práce.

Také děkuji Matematicko-fyzikální fakultě za umožnění uspořádání tohoto tábora, a tudíž poskytnutí možnosti se ho účastnit, potkat se s lidmi s podobnými zájmy a užít si tu dva týdny plné zajímavých přednášek a zábavných her.

Úvod

Tato práce se zabývá simulací reálných fyzikálních dějů a pohybů pomocí programu Excel. Součástí projektu je vysvětlení a odvození metody, s jejíž pomocí jsme schopni vyobrazit různé grafy bez potřeby využití složitějších matematických aparátů. Musíme však počítat se skutečností, že vytvářené modely vychází pouze z určitých dodaných parametrů a nemohou zahrnout veškeré okolnosti, ke kterým při podobných pohybech může dojít.

Metoda funguje na principu rovnic odvozených z dynamických fyzikálních zákonů, které využijeme při postupném výpočtu hodnot jednotlivých parametrů na krátkých časových úsecích.

Práce se ze začátku zabývá vysvětlením základů metody, odvozením několika potřebných vzorců a následně se přesune k ukázkám grafů a funkcionalitě provedených operací v Excelu. Postupně se projekt odebere směrem těžších příkladů na simulaci při započítání odporových sil.

Odvození

Celá metoda se odvíjí ze vzorce pro okamžitou rychlost:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Co je však u našeho postupu odlišné, je, že místo změny dráhy v čase značené Δs využijeme kartézských souřadnic a zapíšeme si to jako rozdíl $x(t + \Delta t)$ a $x(t)$ – souřadnice x v čase t a $t + \Delta t$.

$$v(t + \Delta t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Z této rovnice si vyjádříme pro nás zatím neznámou $x(t + \Delta t)$, jelikož rychlost $v(t + \Delta t)$ bude buď konstantní nebo využijeme vzorec pro okamžité zrychlení a novou rychlost z něj získáme. Každopádně ji v tomto vzorci můžeme považovat za známou hodnotu.

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t + \Delta t).\Delta t$$

$$a(t + \Delta t) = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$v(t + \Delta t) = a(t + \Delta t).\Delta t + v(t)$$

Požadované hodnoty pro začátek simulace se mění příklad od příkladu, avšak ve většině simulací se bavíme o zadané počáteční rychlosti v_0, počátečním či stálém zrychlení a_0, počáteční hodnotě y nebo x a uvedeném Δt.

Kromě zřejmého využití vzorce pro výpočet $x(t + \Delta t)$ se tu nabízí ještě možnost tento samý vzorec využít v určitých příkladech pro zjištění hodnoty $y(t + \Delta t)$, kdy jedinou změnou od základu je, že se zamění písmena. I přes neintuitivnost tohoto kroku tato metoda funguje, což potvrzuje nejen dříve zmíněný článek, ale také vytvořené grafy a tabulky v dokumentaci později ukázané.

$$y(t + \Delta t) = y(t) + v(t + \Delta t).\Delta t$$

Poslední připomínka nutná pro upřesnění: pro správnou funkčnost všech vzorců a teorie je nutno nastavit Δt na opravdu malou hodnotu v desetinách až setinách sekundy. Pokud tomu tak nebude, může dojít ke zkreslení.

V tuto chvíli můžeme přijít k první ukázce grafu a dat k němu potřebných. Začneme příkladem svislého vrhu vzhůru:

Svislý vrh vzhůru

Ve školách se svislý vrh vzhůru obvykle učí pomocí následujících vzorců:

$v = v0 + gt$ pro okamžitou rychlost v čase

$y = v0t - \frac{1}{2}gt^2$ pro okamžitou výšku nad místem, z něhož bylo těleso vrženo

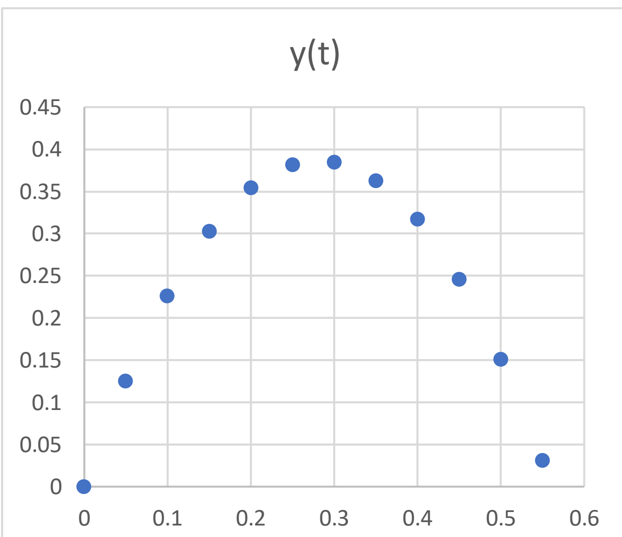
Pomocí dané metody lze všechny tyto kroky zjednodušit pomocí vypočítání jednotlivých hodnot parametrů v časových úsecích trvajících předem zadanou dobu, a to Δt.

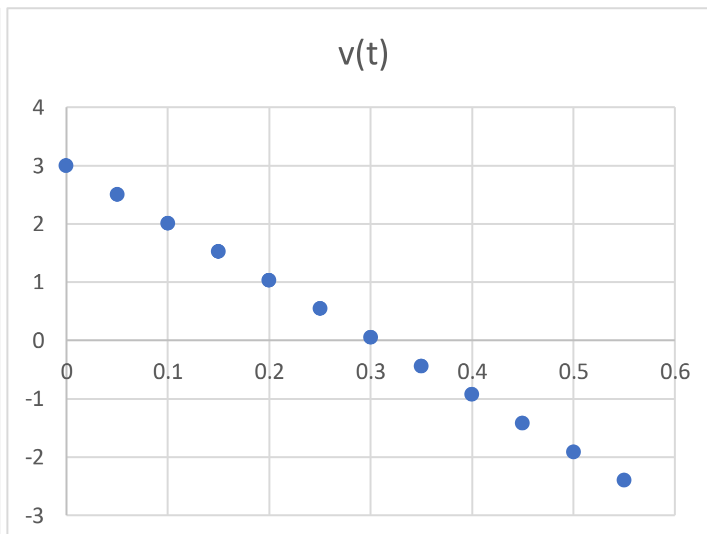
Pro lepší znázornění potřebných začátečních hodnot pro výpočet tu vkládám tabulku. Jak si můžete všimnout, zrychlení tu je kladné, tudíž ve vzorcích s touto skutečností budeme muset pracovat.

y_0	v_0	a	t_0	Δt
0	3	9.81	0	0.05

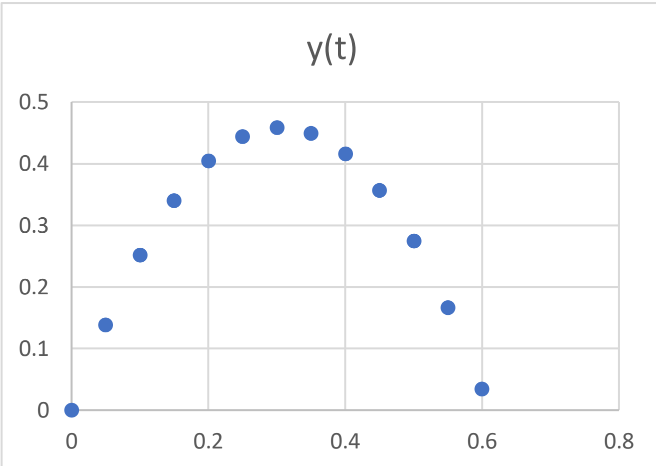
Dále je uvedena i část tabulky, pomocí které se dále vytvářely grafy. Všechny vzorce jsou vytvářené podle předchozí metody, která je vysvětlena v sekci *Odvození*.

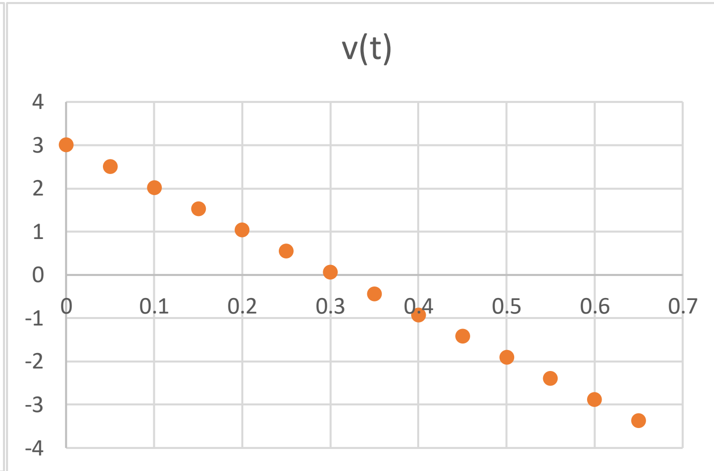
y_1	y_2	v_1	v_2	t
0	0.125475	3	2.5095	0
0.125475	0.226425	2.5095	2.019	0.05
0.226425	0.30285	2.019	1.5285	0.1
0.30285	0.35475	1.5285	1.038	0.15
0.35475	0.382125	1.038	0.5475	0.2





Pro srovnání zde navíc připojuji grafy, které byly vytvořeny se stejnými vstupními hodnotami jako předchozí grafy, akorát se vzorci běžně využívanými ve školách.





Šikmý vrh

Dále jsem pracovala na vrhu šikmém. Ze začátku opět uvedu tabulku předem zadaných hodnot (tentokrát je již zrychlení v záporné hodnotě):

x_0	y_0	v_0	α	a	Δt
0	0	14	30	-9.81	0.05

Znovu tu před vysvětlením uvedu ve školách užívané vzorce:

$$v_x = v_0 \cos \alpha$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt$$

$$x = v_x t = v_0 t \cos \alpha$$

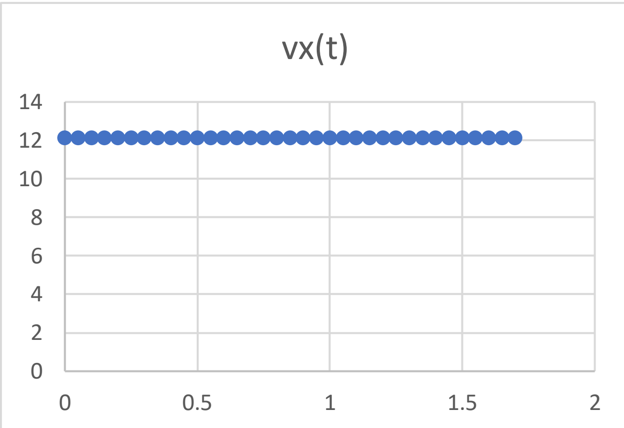
$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

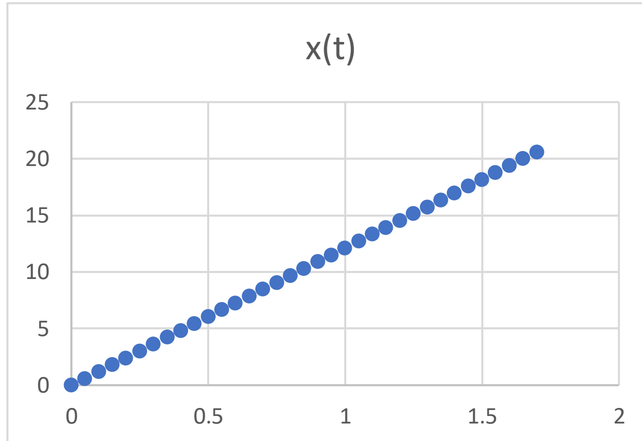
Díky využití naší metody jsme schopni tyto vzorce vynechat, a tudíž si i zjednodušit postup vypisování a simulace. Pro všechny hodnoty využijeme již dříve zmíněné vzorce kromě hodnoty v_x, kterou si vypočítáme pomocí funkce kosinus, jako tomu tak je ve vzorci nad tímto textem.

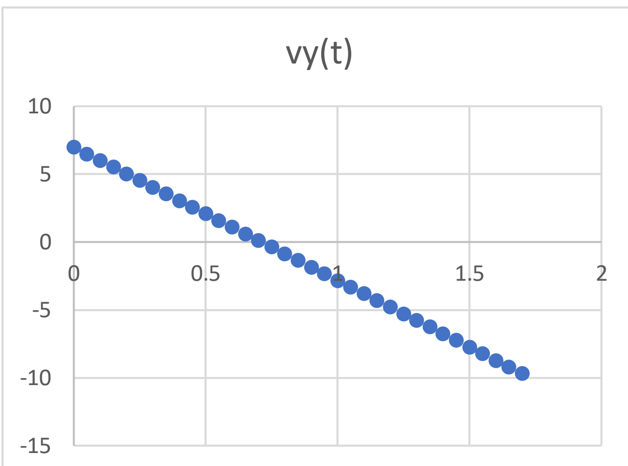
Ukázka části tabulky:

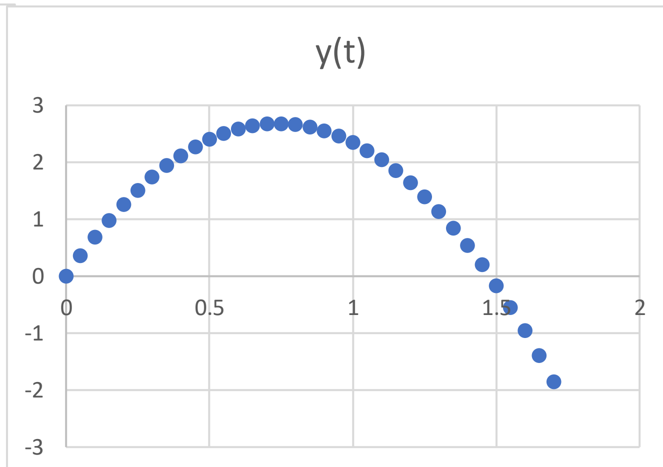
v_x	v_y	v_{y2}	v	x	x_2	y	y_2	t
12.12436	7	6.5095	14	0	0.606218	0	0.35	0
12.12436	6.5095	6.019	13.76131	0.606218	1.212436	0.35	0.675475	0.05
12.12436	6.019	5.5285	13.53619	1.212436	1.818653	0.675475	0.976425	0.1
12.12436	5.5285	5.038	13.32533	1.818653	2.424871	0.976425	1.25285	0.15
12.12436	5.038	4.5475	13.12941	2.424871	3.031089	1.25285	1.50475	0.2
12.12436	4.5475	4.057	12.94912	3.031089	3.637307	1.50475	1.732125	0.25

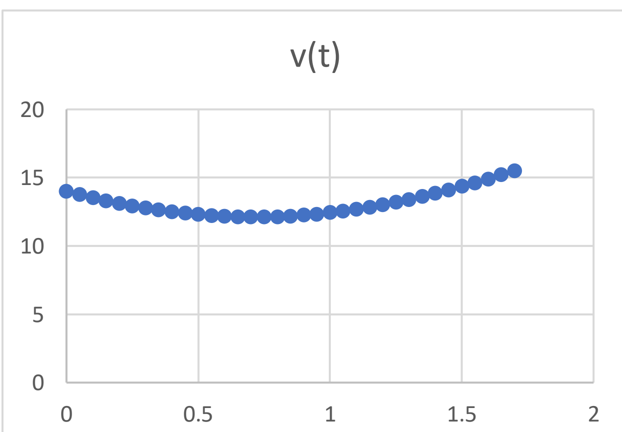
Grafy:

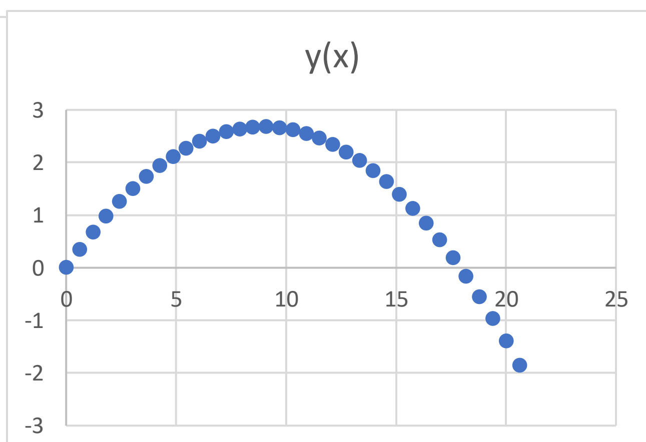

vx(t)
14
12
10
8
6
4
2
0
0
0.5
1
1.5
2


x(t)
25
20
15
10
5
0
0
0.5
1
1.5
2


vy(t)
10
5
0
-5
-10
-15
0
0.5
1
1.5
2


y(t)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
0.5
1
1.5
2


v(t)
20
15
10
5
0
0
0.5
1
1.5
2


y(x)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
5
10
15
20
25

Kmitavý pohyb

Tato část projektu opět začala nutností pochopit novou část metody a také odvozením pár vzorců, zejména pro zrychlení, které se tu poprvé mělo určitým způsobem měnit, nemělo už být nulové nebo stálé.

Důležitou součástí odvození bylo uvědomit si jednotlivé síly, které na hmotný bod zároveň působí (stále však nepracujeme se silou odporovou). Brala se na vědomí pouze tíhová síla společně se silou, kterou působila pružina v závislosti na její tuhosti a proměnné výchylce. Tyto dvě síly se složily do jedné, přičemž proměnná *k* značí tuhost dané pružiny a *y* okamžitou výšku hmotného bodu:

$$F = -k.y(t)$$

Dále přišel čas na využití 2. Newtonova zákona, a to vzorce $F = m * a(t + \Delta t)$, jehož hodnota byla rovna síle, kterou jsme si složili. Z toho vyplývá:

$$m.a(t + \Delta t) = -k.y(t)$$

Ze získaného vzorce si vyjádříme hodnotu zrychlení:

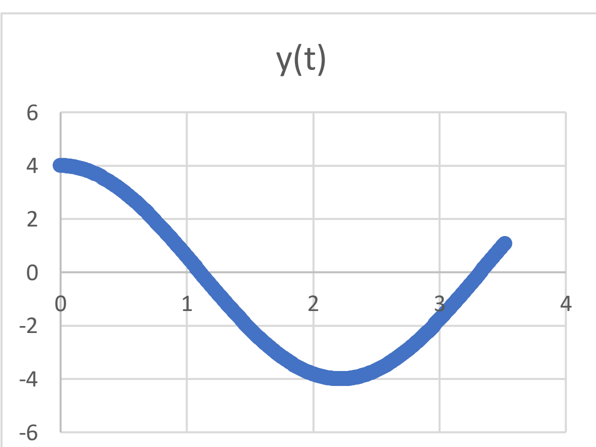
$$a(t + \Delta t) = -\frac{k.y(t)}{m}$$

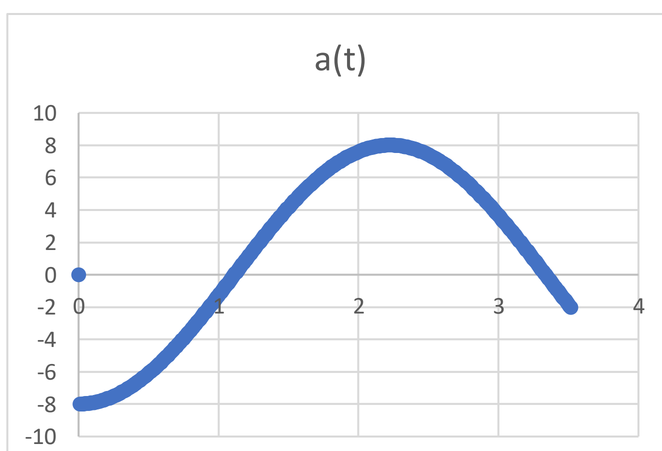
V tuto chvíli se musíme obrátit zpět na Excel a naše nové poznatky do programu vložit a vytvořit grafy kmitavého pohybu.

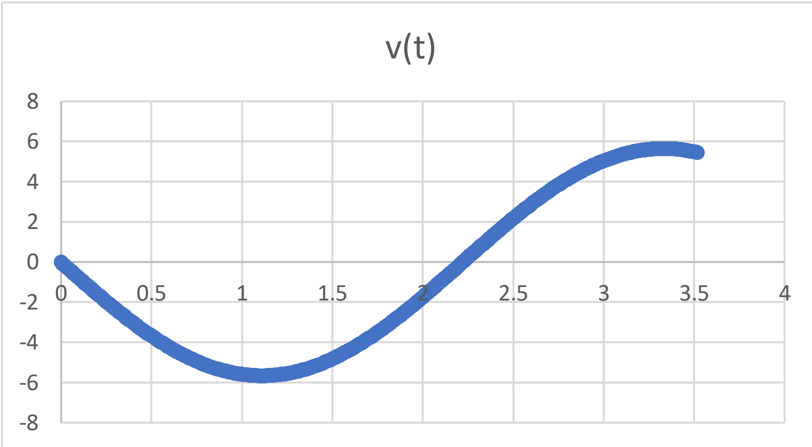
y_0	k	m	Δt	v_0
4	0.2	0.1	0.05	0

a	v	y	t
0	0	4	0
-8	-0.4	3.98	0.05
-7.96	-0.798	3.9401	0.1

Grafy jsem si vytvořila v závislosti okamžité výšky na čase, okamžité rychlosti na čase a zrychlení na čase. Kvůli chybné metodě zadání zrychlení se promítne první bod na 0 a poté se spraví na svoji správnou hodnotu a vytvoří správný graf.







Odporové síly – volný pád

Po prvních grafech, které jsem vytvořila nedbajíc na možné působení odporových sil, jsem se přesunula právě k takovým příkladům, kde bych je mohla zahrnout.

Pro začátek jsem si vyzkoušela působení odporových sil na volně padající těleso. Před ukázkou grafů však musím opět vysvětlit způsob, jakým si vzorce nahradím využitím metody postupných změn hodnot v čase.

Odporová síla se počítá ze vzorce $F_0 = \frac{1}{2} CS\rho v^2$

Jelikož jsou *C, S a* ρ konstantami, které bychom si museli v každém případě do Excelu uložit do separátních buněk, ve kterých bychom mohli hodnoty měnit pouze my sami, sloučila jsem je společně s násobkem $\frac{1}{2}$ do jedné proměnné nazvané *K.* Vzorec se nám tudíž změnil na: $F_0 = Kv^2$. Kromě odporové síly na těleso při volném pádu samozřejmě působí opačným směrem síla tíhová. Z této skutečnosti si odvodíme vztah pro celkovou sílu jako: $F = F_G - F_0$.

Po vyjádření všech sil dostaneme:

$$ma(t + \Delta t) = mg - Kv^2(t)$$

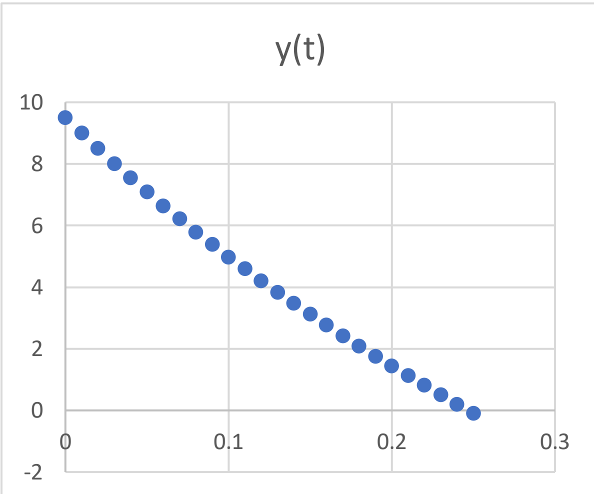
Zmíněný vzorec si upravíme za účelem získání nové hodnoty zrychlení v čase $(t + \Delta t)$:

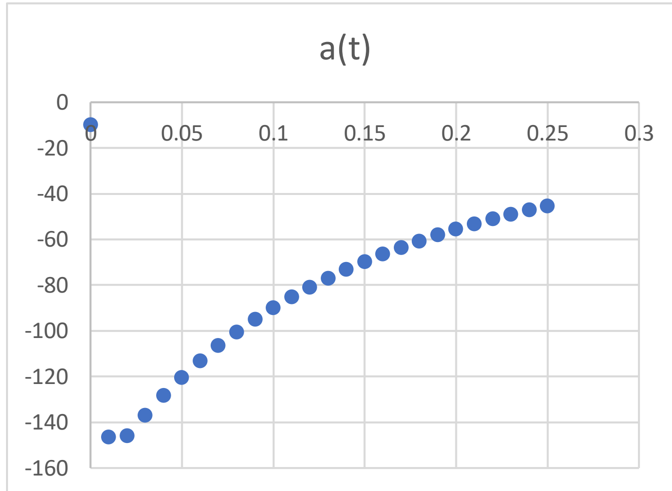
$$a(t + \Delta t) = g - \frac{Kv^2(t)}{m}$$

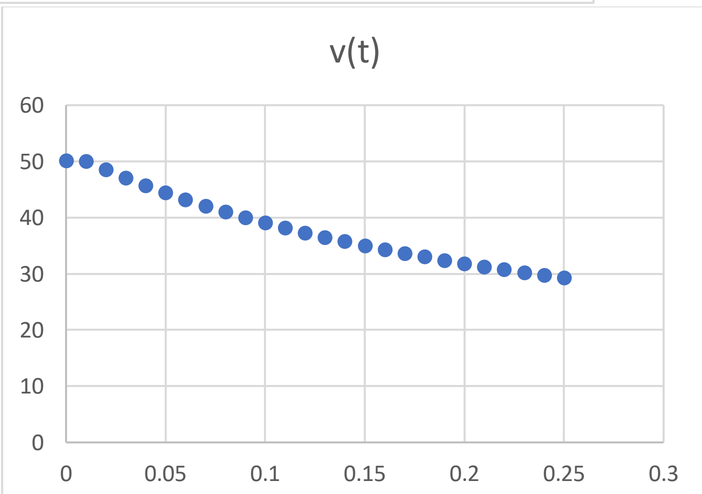
Jelikož jsme si byli schopni již všechny potřebné vzorce odvodit či znovu využít z předchozích příkladů, můžeme již přeskočit k vypsání počátečních hodnot daných parametrů, ukazu části tabulky a grafům.

y_0	v_0	Δt	g	K	m
10	50	0.01	9.81	5	80

y	v	a	t
9.5	50	-9.81	0
9	49.9019	-146.44	0.01
8.500981	48.4375	-145.827	0.02
8.016606	46.97923	-136.827	0.03







U simulace tohoto příkladu pohybu je velice důležité si správně navolit vstupní parametry. V okamžiku, kdy potřebujeme počítat s větší počáteční rychlostí, je nutné zvolit si hmotnosthmotného bodu odpovídající této vložené rychlosti.

Při zanedbání tohoto pravidla může dojít k poměrně postřehnutelnému zkreslení grafů.

Tento pohyb odpovídá pohybu padajícího parašutisty.

Odporové síly – kmitavý pohyb

Druhý graf vytvořený s odporovými silami branými v úvahu je grafem kmitavého pohybu. Kmitavý pohyb se s působením odporových sil v průběhu času tlumí. Pro vypočítání okamžitého zrychlení, které se také bude měnit v čase využijeme opět vzorce pro skládání sil. Tentokrát však do sčítání společných sil zapojíme samozřejmě jak odporovou sílu, tak i sílu, kterou bude působit pružina.

$$F = F_p - F_o$$

Na co musíme pomyslet před vyjádřením rovnice, je, že na rozdíl od kmitavého pohybu, který jsme simulovali v předchozí části, se tu rychlost ve vzorci odporové síly nebude umocňovat na druhou. Důvodem této změny je menší rychlost pohybu kmitajícího tělesa.

$$ma = -ky - Kv$$

Z čehož vyplývá:

$$a = -\frac{ky + Kv}{m}$$

Poslední poznámkou ke kmitavému pohybu je fakt, že vyvozením z teorie lze dokázat, že pokud platí následující rovnost pro dikriminant z odvozené diferenciální rovnice: $D = K^2 - 4mk = 0$, tak u kmitání dochází k meznímu případu mezi tlumeným pohybem a nadkritickým tlumením. Když je výsledek této rovnice menší jak nula, jedná se o pohyb tlumenný.

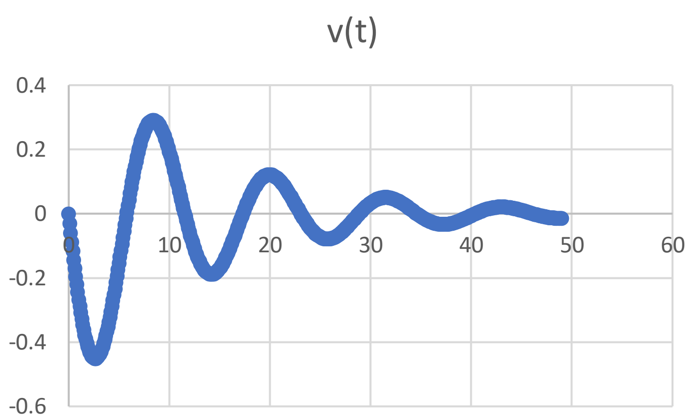
Dále uvedeme již hodnoty v tabulce předzadaných parametrů.

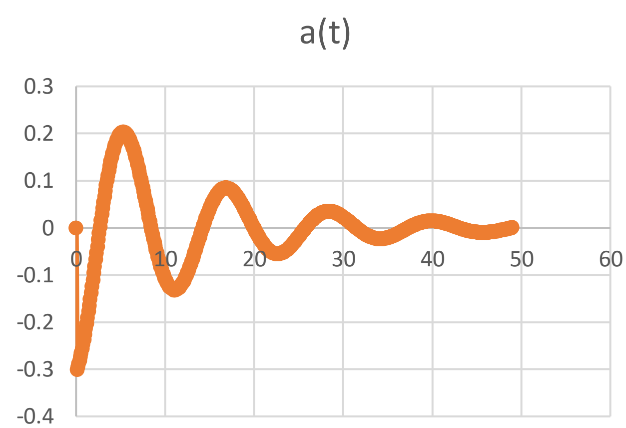
y_0	k_p	K	m	Δt	v_0	g
1	0.6	0.3	2	0.1	0	9.81

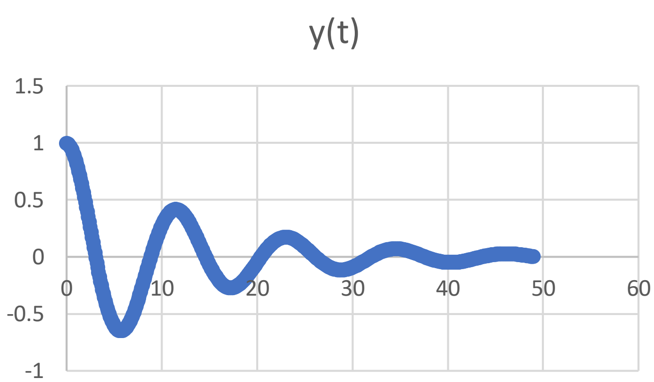
Jak si můžete povšimnout, náš diskriminant vychází $0.3^2 - 4\ .\ 2\ .\ 0{,}6 = -4{,}71$, mělo by tudíž jít o kmitání tlumenné.

a	v	y	t
0	0	1	0
-0.3	-0.03	0.997	0.1
-0.2946	-0.05946	0.991054	0.2
-0.2884	-0.0883	0.982224	0.3

Jak lze postřehnout na následujících grafech, skutečně jde o kmitání tlumenné.







Pohyb po kružnici

Poslední pohyb, který si tu uvedeme, je pohyb po kružnici za působení dostředivé síly. V tomto příkladu opět musíme pracovat s novým vyjádřením zrychlení, jelikož působení započítaných sil se opět změnilo.

Pracujeme v podstatě pouze se sílou dostředivou, jejíž vzorec je vyvozen z Newtonova 2. zákona: $F_d = m \,.\, a_d$. Dostředivé zrychlení si vyjádříme jako $\overrightarrow{a_d} = -\frac{v^2}{r^2}.\vec{r}$, přičemž $\vec{r}$ značí polohový vektor směřující z počátku soustavy na daný bod v libovolném čase při pohybu na kružnici. Druhou mocninu rychlosti v^2 si vyjádříme opět skládáním sil Pythagorovou větou.

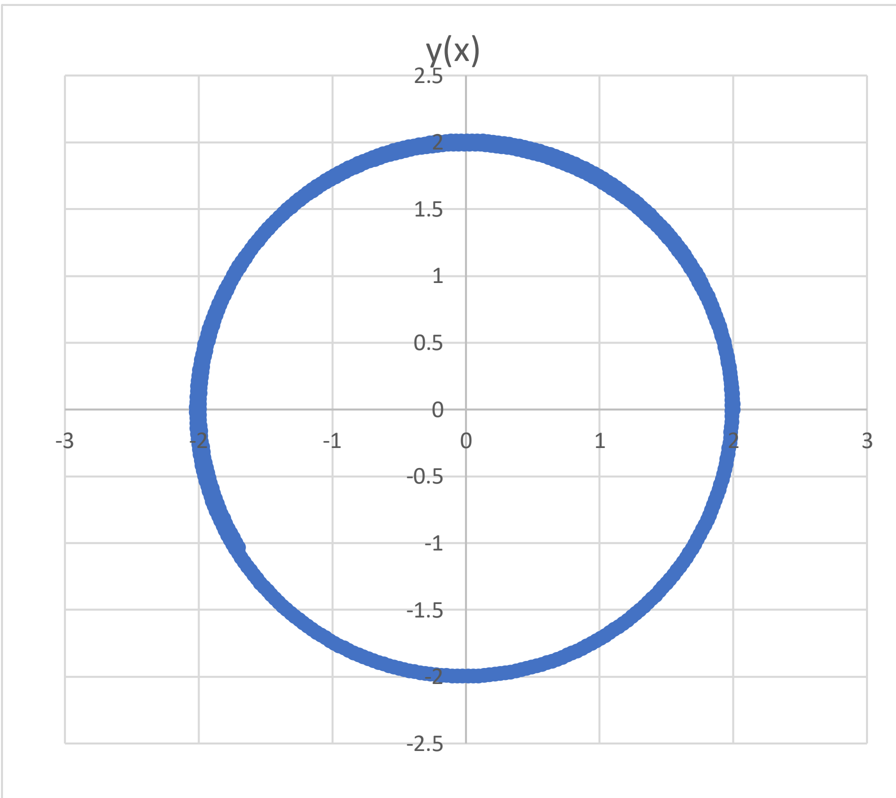
Po dosazení: $\overrightarrow{a_d} = -\frac{{v_x}^2+{v_y}^2}{r^2}.\vec{r}$

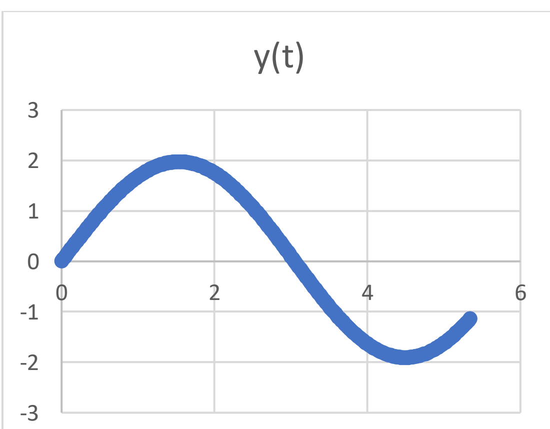
Pro zrychlení ve směru x (a_{dx}) se x-ová souřadnice polohového vektoru $\vec{r}$ bude rovnat x. Pro a_{dy} se y-ová souřadnice polohového vektoru $\vec{r}$ bude rovnat y.

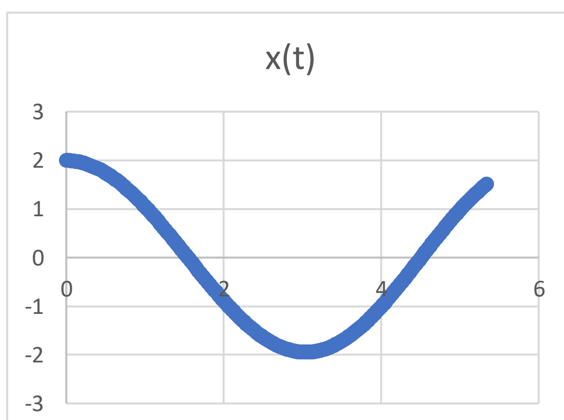
Jelikož v tuto chvíli již známe/máme vyjádřené veškeré požadované parametry, můžeme přejít k tabulce hodnot a grafům.

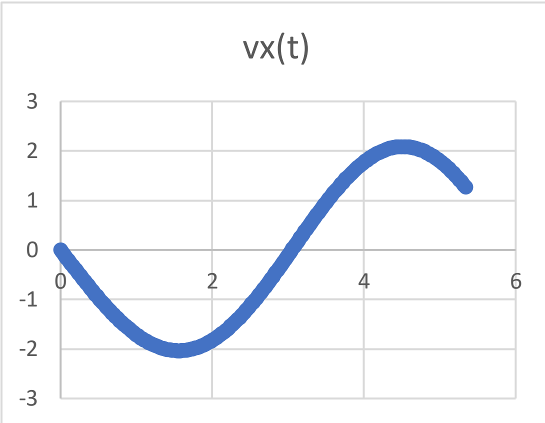
v_x	v_y	r	m	Δt
0	2	2	0.3	0.02

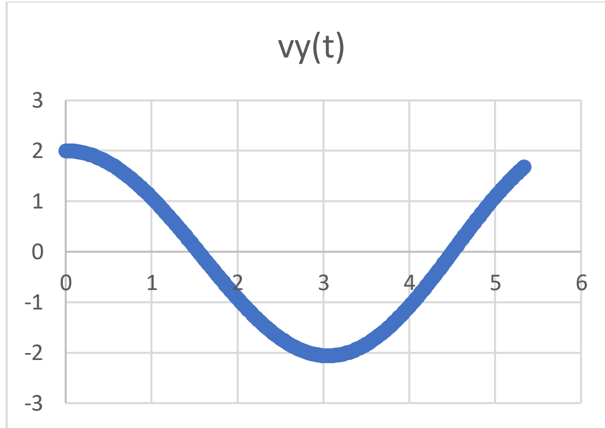
a_x	a_y	v_x	v_y	v	t	x	y
0	0	0	2	2	0	2	0
-2	0	-0.04	2	2.0004	0.02	1.9992	0.04
-2.0008	-0.04003	-0.08002	1.999199	2.0008	0.04	1.9976	0.079984

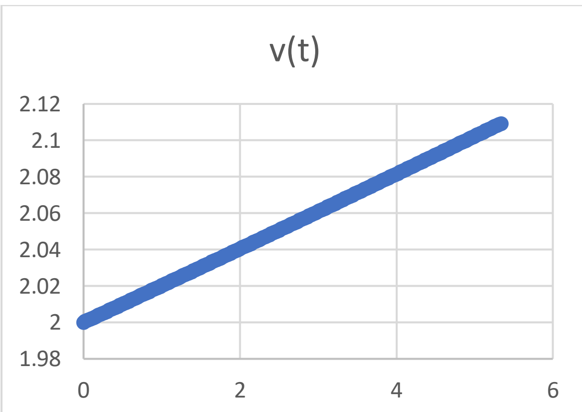


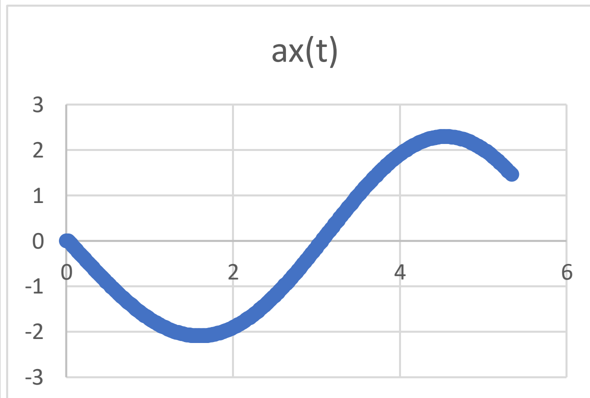





vx(t)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
2
4
6


vy(t)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
1
2
3
4
5
6


v(t)
2.12
2.1
2.08
2.06
2.04
2.02
2
1.98
0
2
4
6


ax(t)
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
2
4
6

Závěr

V projektu se mi podařilo nasimulovat různé pohyby pomocí metody pro postupné počítání hodnot v krátkých časových intervalech v programu Excel. Zvládla jsem, jak nasimulovat základní pohyby, tak i později přidat do mých simulací odporové síly, jak už to bylo vidět v grafech volného pádu, kmitání a pohybu po kružnici.

Projekt by v budoucnosti mohl být rozšířen o další simulace mezi které by např. mohl patřit pohyb planet.

Seznam použité literatury a zdrojů informací

[1] Modelování fyzikálních dějů numerickými metodami, Přemysl Šedivý, MODELOV.dvi (fyzikalniolympiada.cz)