Logaritme, logaritme

Jindřich Dvořáček

1. 7. 2023–14. 7. 2023

Anotace

V celotáborovém projektu „Logaritme, logaritme“ v první části popisuji teorii logaritmů – odkud se vzaly, jak fungují logaritmické tabulky, jak násobit na logaritmickém pravítku a odkud se vzalo číslo e a s ním spojen přirozený logaritmus. V druhé části popisuji Weberův-Fechnerův psychofyzikální zákon, který jsem se pokusil i experimentálně ověřit.

Klíčová slova

Logaritmus, logaritmické tabulky, Eulerovo číslo, Weberův-Fechnerův zákon.

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval vedoucí mého projektu Lydii Cehákové za výborné vedení a trefné připomínky k dokumentaci, k programu LaTeX a k experimentu. Dále děkuji všem, kdo se zúčastnili mého měření.

Obsah

1 Obecně o logaritmech

Hlavní motivací pro objev logaritmů bylo zjednodušení výpočtů, a to konkrétně násobení a dělení. Pěkně tento fakt shrnuje výrok od Pierra Simona Laplacea (1749–1827): *„Logaritmy zkrátily výpočty a prodloužily tak život astronoma na dvojnásobek.“* Astronomové totiž často pracují se sférickou trigonometrií, kde dva základní vzorce – sinová a kosinová věta (viz rovnice 1 a 2) – užívají násobení a dělení.

sinová věta:

$$\sin a = \frac{\sin c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma} \tag{1}$$

kosinová věta:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \sin \gamma \tag{2}$$

Při tvorbě astronomických i jiných tabulek by tedy bylo výhodné mít pomocníka při násobení, resp. dělení. Na scénu přicházejí logaritmy. [1]

1.1 Definice logaritmu

Logaritmus kladného reálného čísla x při základu $a; a \in (0;1) \cup (1;\infty)$ je takové reálné číslo $y = \log_a x$, pro které platí $a^y = x$. Logaritmus je tedy takové číslo, na které musíme umocnit základ, abychom dostali argument logaritmu – logaritmované číslo. [2]

1.2 Graf logaritmické funkce

Podívejme se na obrázky 1 a 2. Pokud je základ $a \in (0;1)$, pak je funkce klesající a pokud je $a \in (1;\infty)$, pak je funkce rostoucí. Základ $a = 1$ by nedával smysl, stejně jako základ $a < 0$, viz sekce 1.1. Vidíme, jak základ řídí sklon logaritmické funkce.

1.3 Pravidla pro počítání s exponenty a logaritmy

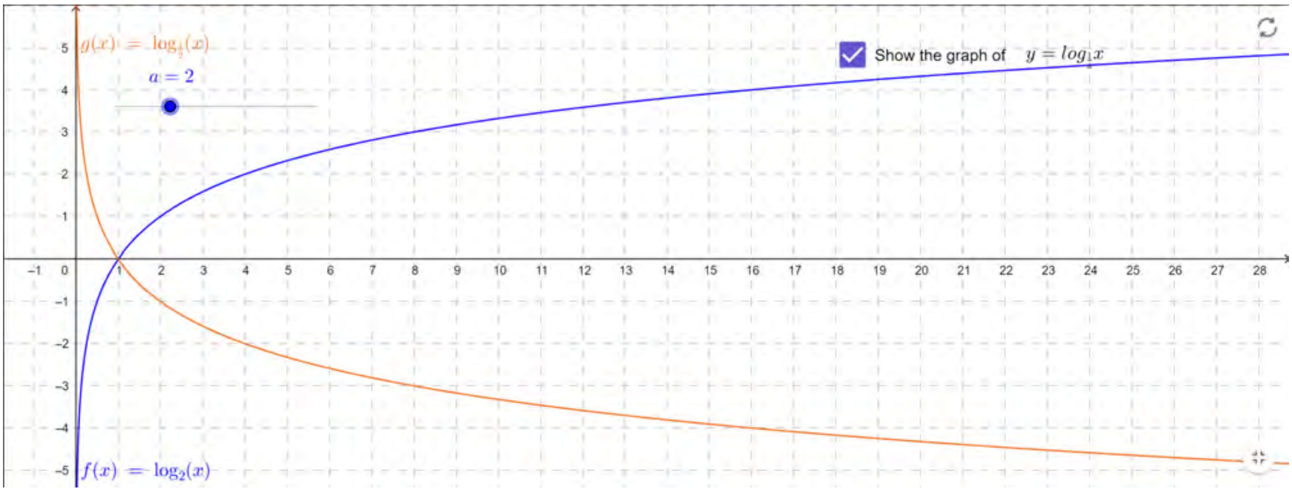
Z definice vidíme, že logaritmy přímo souvisí s exponenty. Není tedy na škodu si připomenout vybraná pravidla pro počítání s nimi.

$$a^0 = 1 \; pro \; a \neq 0 \tag{3}$$

$$a^1 = a \tag{4}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{5}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \; pro \; a \neq 0 \tag{6}$$



Obrázek 1: Příklady grafů logaritmických funkcí [1]

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \tag{7}$$

Důležitá budou hlavně pravidla (5) a (6).

1.3.1 Odvození pravidel pro počítání s logaritmy

Povšimněme si zajímavé vlastnosti logaritmů:

$$p^{\log_p q} = q \tag{8}$$

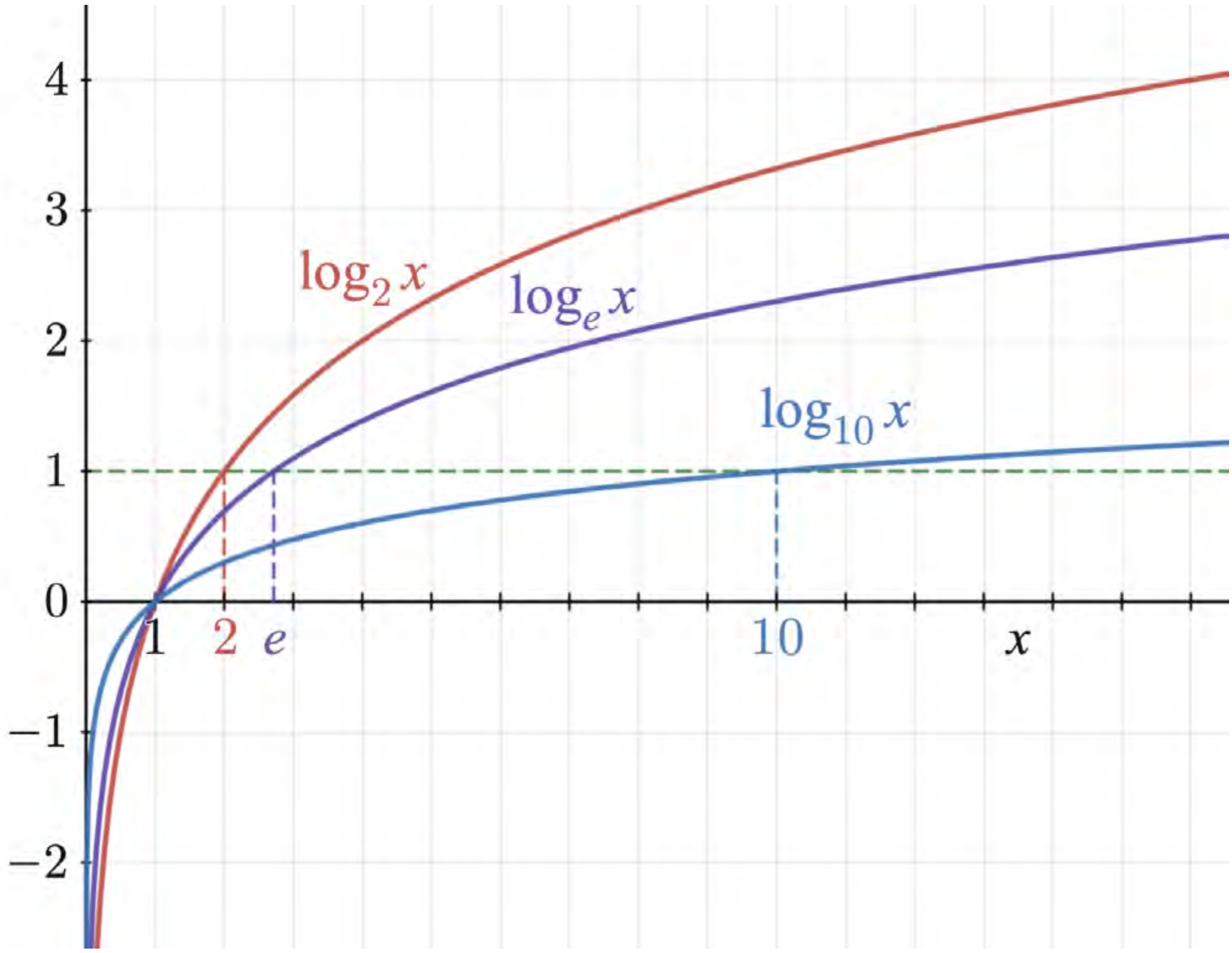
Základ logaritmu – p – umocníme na „něco“ a dostaneme argument – q. Mocněnec p tedy budeme umocňovat na to „něco“ a dostaneme opět argument – q. Nyní si již můžeme odvodit základní pravidlo pro počítání s logaritmy. Mějme logaritmus, kde se násobí dva argumenty.

$$\log_p(r \cdot s) = \log_p(p^{\log_p r} \cdot p^{\log_p s}) = \log_p(p^{\log_p r + \log_p s}) = \log_p r + \log_p s \tag{9}$$

Nejprve si oba přepíšeme podle pravidla (8) a následovně užijeme pravidla (5). Poté už opět dle pravidla (8) zjistíme, že součin argumentů je roven součtu logaritmů o stejném základu. Analogicky se s využitím pravidla (6) dá odvodit i podíl argumentů. Další pravidlo použijeme v situaci, kdy je argument umocňován.

$$\log_p(r^q) = \log_p(r \cdot r \cdot r \cdot ...) = \log_p r + \log_p r + \log_p r + ... = q \cdot \log_p r \tag{10}$$

Vidíme, že r je umocněno na q, tudíž si můžeme součin v logaritmu rozepsat. Dle pravidla (9) si výraz rozepíšeme a už vidíme, že tam máme přesně q sčítanců.



Obrázek 2: Příklady grafů logaritmických funkcí ($e \approx 2{,}718\,281\ldots$) [2]

2 Logaritmické tabulky

První logaritmické tabulky byly vydány již v roce 1614. Vydal je skotský matematik, fyzik, astronom a astrolog John Napier (1550–1617). Jeho tabulky nesly název *„Mirifici logarithmorum canonis descriptio"*. Napsal také návod, jak takové tabulky sestrojit – *„Mirifici logarithmorum canonis constructio"*, ale byl vydán až posmrtně v roce 1619. [3, str. 1–3] Jak logaritmické tabulky fungují? Jejich účel tkví v převedení násobení na sčítání pomocí pravidla (5). Podívejme se na tabulku 1 o základu 2. Vpravo máme vypsány mocniny dvojky, vlevo přirozená čísla, resp. exponenty, resp. logaritmy čísel vpravo – například řádek označený 7 obsahuje vlevo $\log_2 128 = 7$ a vpravo $2^7 = 128$. Proces funguje následovně: vyberu si čísla v pravém sloupci, která chci vynásobit, podívám se ke kterým číslům přísluší, ta čísla sečtu a podívám se na řádek označený součtem. Číslo vpravo na onom řádku je hledaný součin. Uvedu příklad:

$$64 \cdot 128 = 2^6 \cdot 2^7 = 2^{6+7} = 2^{13} = 8192$$

1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256
9	512
10	1024
11	2048
12	4096
13	8192
14	16 384
15	32 768

Tabulka 1: Logaritmická tabulka o základu 2

Číslo 64 přísluší řádku označeném 6, 128 řádku 7. $7+6=13$, tudíž výsledek najdeme na řádku označeném 13: 8192. [3, str. 3–4]

2.1 Napierovy tabulky

Je vidět, že tabulka o základu 2 je dosti „řídká“ – nemá dostatek čísel v pravém sloupci, která bychom mohli násobit. Jedním z řešení je zvolit základ blízký 1. Tak dostaneme mnohem „hustší“ tabulku. John Napier si ve svých prvních tabulkách zvolil základ $1-10^{-7}$. V tabulce 2 jsou vybrané řádky takové tabulky.

Ve skutečnosti Napierovy tabulky obsahují hodnoty $10^7 \cdot (1-10^{-7})^n$. Pro jejich tvorbu by Napier musel neustále násobit základem $0,999\ 999\ 9$, všiml si však jisté zákonitosti, viz tabulka 3.

Na místě jednotek čísla klesají o jedničku, pak následuje blok nul a cifry za ním je možné zanedbat. Díky tomu vytvořil Napier tzv. *První tabulku.* Další tabulky (druhá, třetí) vytvořil komplikovanějším způsobem, nicméně díky pozorování a pečlivému odhadu chyb si usnadnil práci. [3, str. 5–6]

n	$(1-10^{-7})^n$
1	0,9999999
2	0,9999998 0000001
3	0,9999997 00000029999999
4	0,9999996 000000599999960000001
5	0,9999995 0000009999999000000049999999
6	0,9999994 00000149999980000001499999940000001
10	0,9999990 000004499998800000209999974800002099999880000. . .
100	0,9999900 0004949983830039212. . . . . .
7 500 000	0,4723665 3502726813056629714. . . . . .
10 000 000	0,3678794 2277746949660786692. . . . . .
100 000 000	0,0000453 999070625241319530913. . .
100 000 001	0,0000453 999025225334257006781. . .

Tabulka 2: Vybrané řádky tabulky o základu $1-10^{-7}$, tabulka převzata z [3, str. 5]

n	$10^7 \cdot (1-10^{-7})^n$
1	9 999 999, 000 000 0
2	9 999 998, 000 000 1
3	9 999 997, 000 000 3

Tabulka 3: Vybrané řádky Napierovy tabulky, tabulka převzata z [3, str. 6]

$\frac{1}{2}$	?
1	2
2	4
3	8

Tabulka 4: Logaritmická tabulka o základu 2 s racionálním indexem

0	1
$\frac{1}{4}$	$2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} =$ 1,189 207 115 002 ...
$\frac{1}{2}$	$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1,414213562373...$
$\frac{3}{4}$	$2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3} =$ 1,681 792 830 507 ...
2	4

Tabulka 5: Logaritmická tabulka o základu 2 s racionálními indexy

2.2 Postupné doplňování tabulky

V této podsekci vycházím ze zdroje [1]. Napierovy tabulky obsahují vlevo přirozená čísla. Kdo nám ale brání tam mít i čísla racionální? Druhým řešením je postupné doplňování tabulky. Vezměme si opět tabulku o základu 2, viz tabulka 4.

Pokud chceme, aby tabulka fungovala, tak součet čísel vlevo je roven součinu čísel vpravo. Co tedy patří k $\frac{1}{2}$? Je to $\sqrt{2}$, protože $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ a $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, což koresponduje s řádkem označený 1, viz tabulka 5. Pokud víme, kolik je $\sqrt{2}$, tak můžeme jednoduše přidávat i hodnoty pro $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, etc. Poté můžeme hledat, kolik je $\sqrt[4]{2}$ a díky tomu můžeme jednoduše spočítat hodnoty pro $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$ etc. Z pravidel pro tabulky taktéž vyplývá, že $a^0 = 1 \; pro \; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, protože když přičítám 0, nic nezměním, tudíž hledám činitel, který taktéž nic nezmění, a to je 1.

Tabulka se nám krásně zahušťuje, avšak uživatelsky není příjemná. Potřebovali bychom vpravo mít pěkná čísla a vlevo k nim mít jejich indexy, resp. logaritmy. k tomuto přepočtu použijeme dva poznatky:

1. *Pokud číslu k přísluší hodnota A, tak číslu $\frac{k}{2}$ musí příslušet hodnota $\sqrt{A}$.*

2. *Pokud číslům k a m přísluší hodnoty B a C, tak číslu $k + m$ přísluší hodnota $B \cdot C$.* [1]

Pokud spojíme tyto dva poznatky, dostáváme, že k $\frac{k+m}{2}$ patří $\sqrt{B \cdot C}$.

Řekněme, že chceme spočítat $\log_5 10$. Víme, kolik je $\log_5 5$ a kolik je $\log_5 25$, viz tabulka 6. Pomocí našeho pravidla k $\frac{1+2}{2} = 1,5$ patří $\sqrt{5 \cdot 25} = \sqrt{125} = 11,180\ 339\ 89$ ... K 10 jsme blíže. Nyní proces opakujeme. $\frac{1+1,5}{2} = 1,25$, $\sqrt{5 \cdot \sqrt{125}} = 7,476\ 743\ 906$ .... Pokud bychom takhle pokračovali dále, zjistili bychom, že k hodnotě 10 patří index $1,430\ 676\ 558$ ...

1	5
1,25	7,476 743 906 ...
1,430 676 558 ...	**10**
1,5	11,180 339 89 ...
2	25

Tabulka 6: Logaritmická tabulka o základu 5

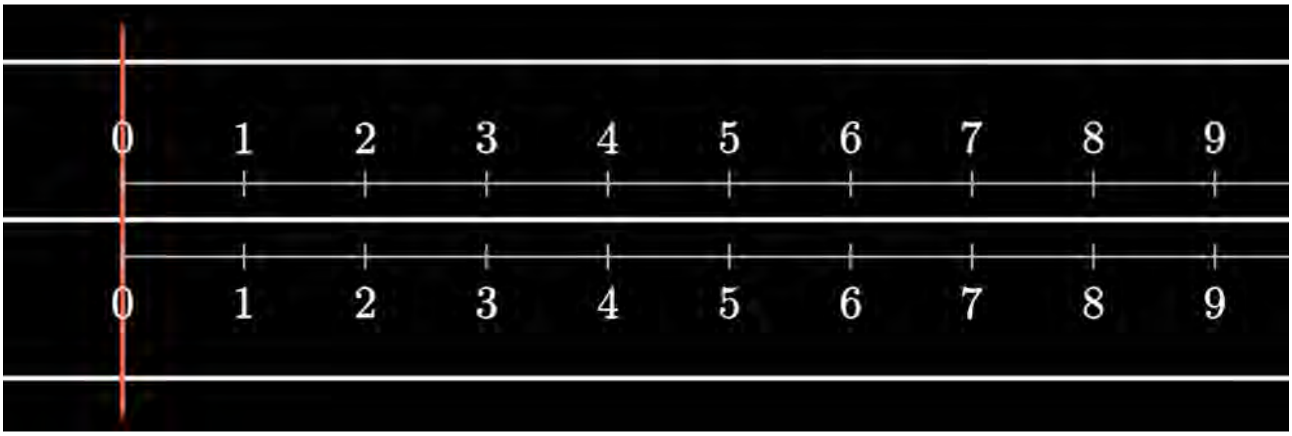
2.3 Původ slova „logaritmus“

Slovo „logaritmus“ vzniklo ze složení dvou řeckých slov: logos *(poměr) a* arithmos *(přirozené číslo, počet.* [3, str. 5]

Pokud pohlédneme na Napierovu tabulku, vlevo vidíme posloupnost přirozených čísel – aritmetickou posloupnost. Na to odkazuje slovo *arithmos*. Vpravo máme členy posloupnosti geometrické, kde poměr (kvocient) $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = konst$. Na to odkazuje slovo *logos*. Logaritmické tabulky tedy spojují aritmetickou a geometrickou posloupnost. [3, str. 5]

3 Logaritmické pravítko

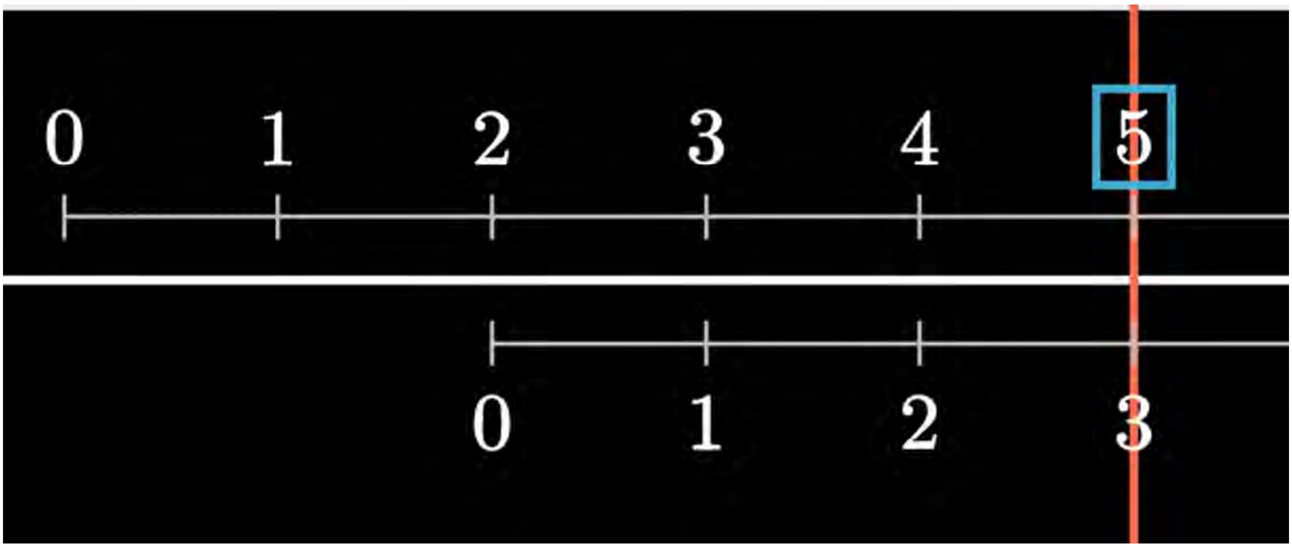
V této sekci vycházím ze zdrojů [4] a [5]. Nejprve si ukážeme, jak funguje sčítání na dvou normálních, lineárních pravítcích. Řekněme, že chceme sečíst čísla 2 a 3. Vezmeme pravítka a dáme nuly k sobě, viz obrázek 3.



Obrázek 3: Pravítka v základní poloze [3]

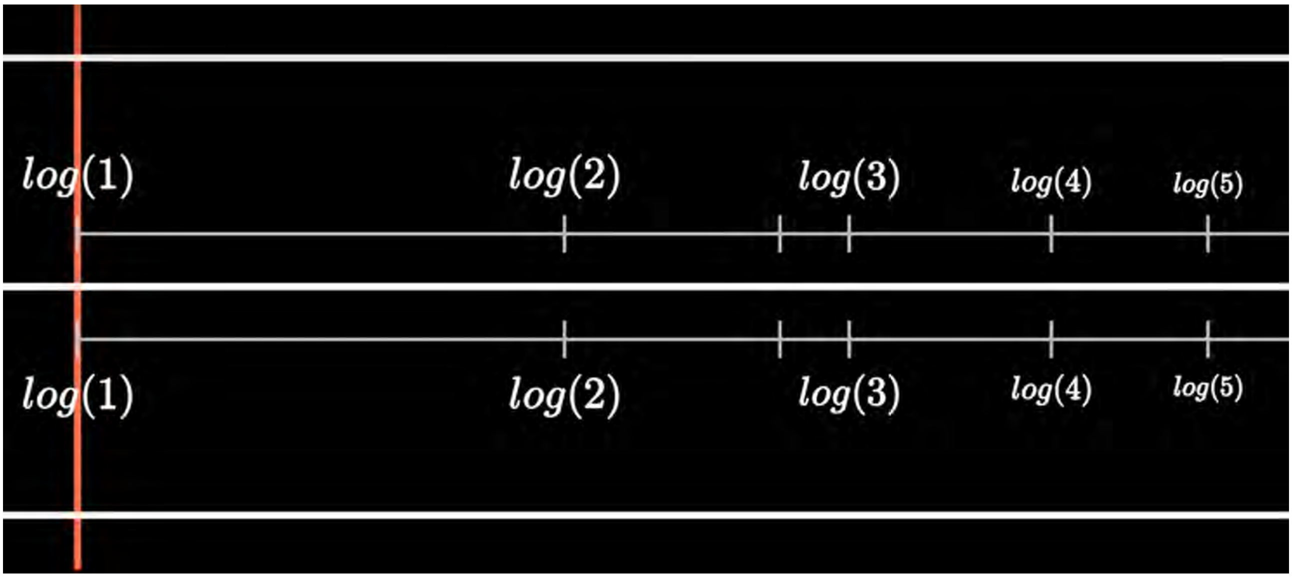
Poté vezmeme spodní pravítko, posuneme jeho nulu ke dvojce horního pravítka a přečteme, ke kterému číslu horního pravítka přísluší trojka spodního pravítka, viz obrázek 4.

Logaritmické pravítko funguje na obdobném principu, přičemž využívá pravidla č. (9) – pra-



Obrázek 4: Sčítání na pravítkách [3]

vidlo o součtu logaritmů. Na stupnici logaritmického pravítka jsou vyznačeny logaritmy, viz obrázek 5.

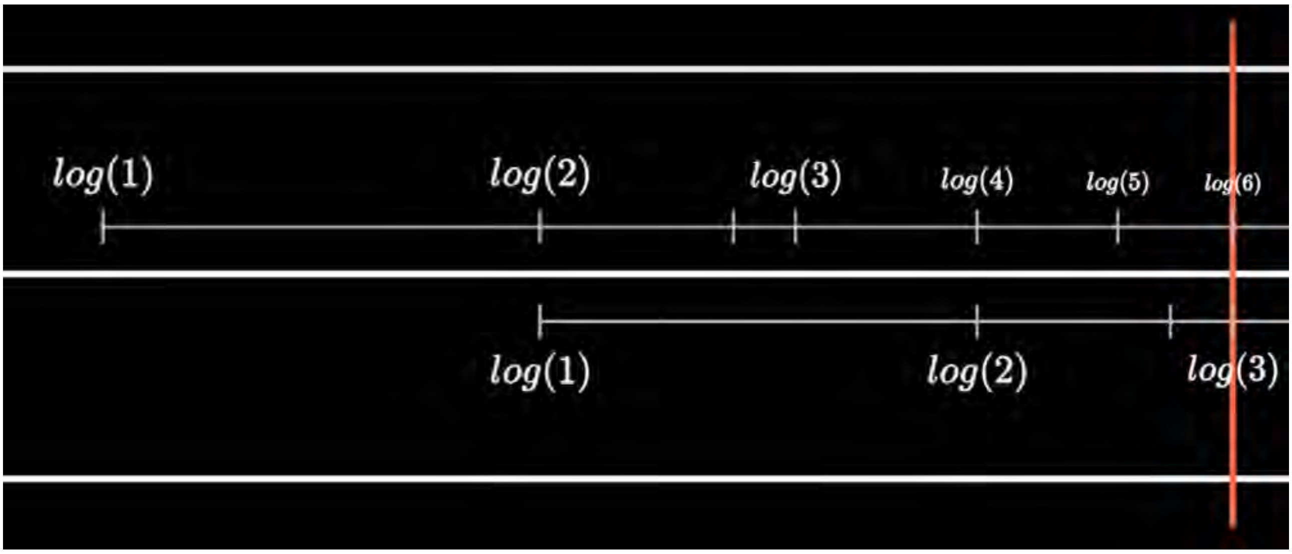


Obrázek 5: Logaritmické pravítko v základní poloze [3]

Pravítko dáme opět do základní polohy. Nyní řekněme, že chceme čísla 2 a 3 vynásobit. Posuneme nulu (neboli $\log 1$) spodní části pravítka ke dvojce (neboli $\log 2$) horní části pravítka a čteme, ke kterému číslu horní části pravítka přísluší trojka spodní části pravítka, viz obrázek 6. Logaritmická pravítka zpravidla končí 10. Jak tedy vynásobíme čísla větší než 10? Jejich součin můžeme určit alespoň přibližně. Trik si ukážeme na příkladu.

$$18 \cdot 55 = 1,8 \cdot 10 \cdot 5,5 \cdot 10 = 9,9 \cdot 100 = 990$$

Čísla si napíšeme jako desetinná čísla vynásobená mocninou desíti. Desetinná čísla vynásobit umíme a výsledek pak vynásobíme těmi mocninami desíti. Čím větší čísla násobíme, tím více desetinných míst převedené číslo bude mít a tím nepřesnější výsledek dostaneme. Záleží na přesnosti našeho posunování.



Obrázek 6: Násobení na logaritmickém pravítku [3]

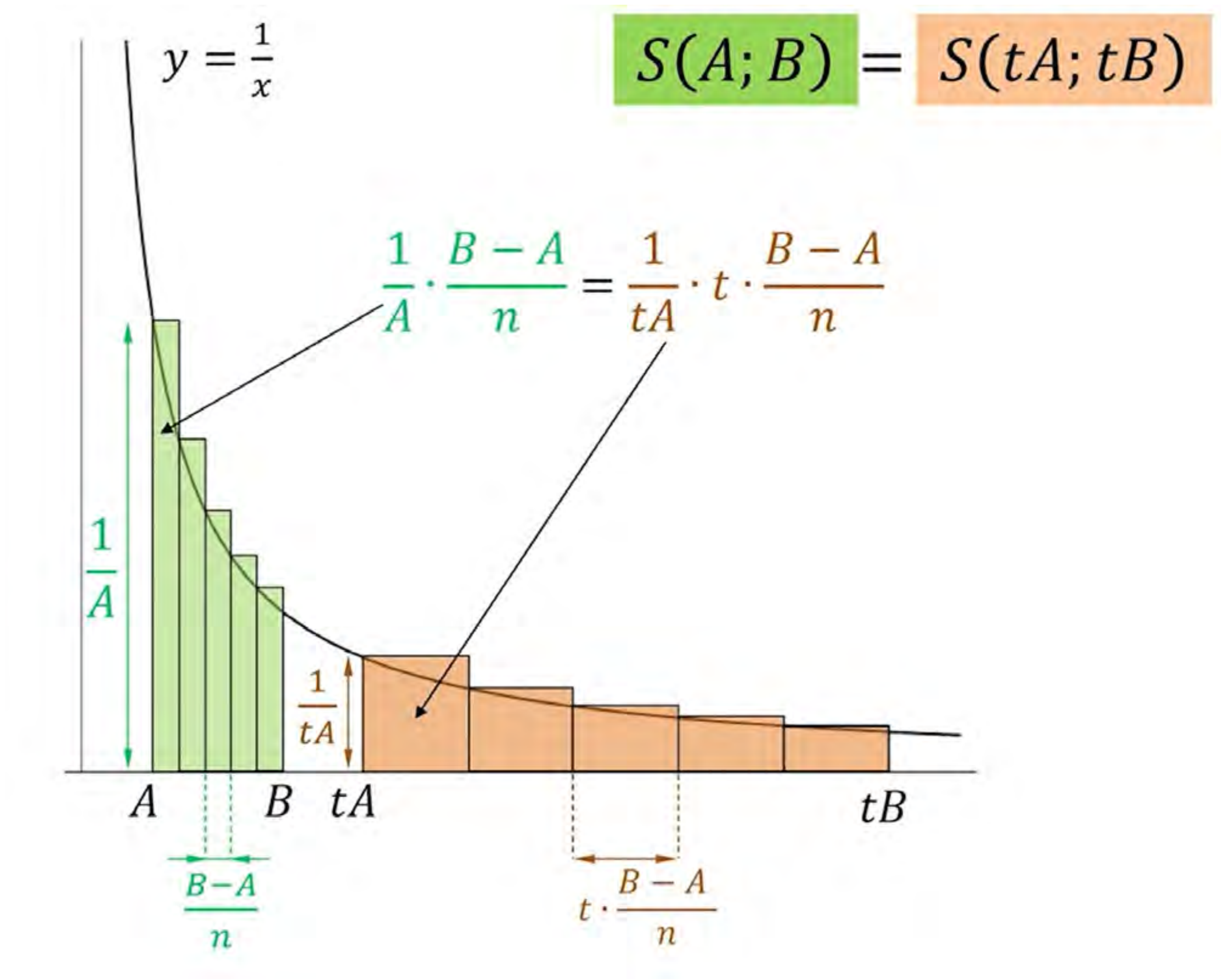
4 Přirozený logaritmus

V této sekci vycházím ze zdroje [6]. Každý z nás slyšel o Eulerově číslu e. Ale odkud se vzalo?

V 17. století pětice matematiků (Bonaventura Cavalieri (1598–1647), Blaise Pascal (1623–1662), Gilles Personne de Roberval (1602–1675), John Wallis (1616–1703) a Pierre de Fermat (1607–1665)) nezávisle přišli na to, jak se spočítá plocha pod grafem funkce $y = x^n$. $S = \frac{a^{n+1}}{n+1}$. Co ale hyperbola $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$? Dvojice Grégoire de Saint-Vincent (1584–1667) a Alphonse Antonio de Sarasa (1618–1667) si všimla důležité vlastnosti hyperboly: plocha pod hyperbolou $y = \frac{1}{x}$ souvisí s logaritmy.

Podívejme se na obrázek 7. Plocha od A do B je stejná jako plocha od tA do tB. Proč? Když budeme chtít plochu od A do B vypočítat, půjdeme na to infinitenzimálně. Rozsekáme interval od A do B na n dílků. Vznikne nám n malých obdélníčků. Výška **prvního** je $\frac{1}{A}$ a jeho šířka je $\frac{B-A}{n}$, na obrázku 7 je zbrazen zelenou barvou. Interval od tA do tB taktéž rozdělíme na n částí. Šířka jednoho obdélníku je $t \cdot \frac{B-A}{n}$ a výška prvního oranžového je $\frac{1}{tA}$. Zjišťujeme, že obsahy prvních obdélníků jsou totožné. Stejná rovnost platí i pro další obdélníčky, tudíž můžeme říct, že $S(A;B) = S(tA;tB)$.

Podívejme se nyní na obrázek 8. Chceme vypočítat obsah plochy pod hyperbolou $y = \frac{1}{x}$ od 1 do x. Označme si tuto plochu jako funkci $F(x)$. Nejdřív pojďme zkoumat plochu od 1



Obrázek 7: Plocha pod hyperbolou [4]

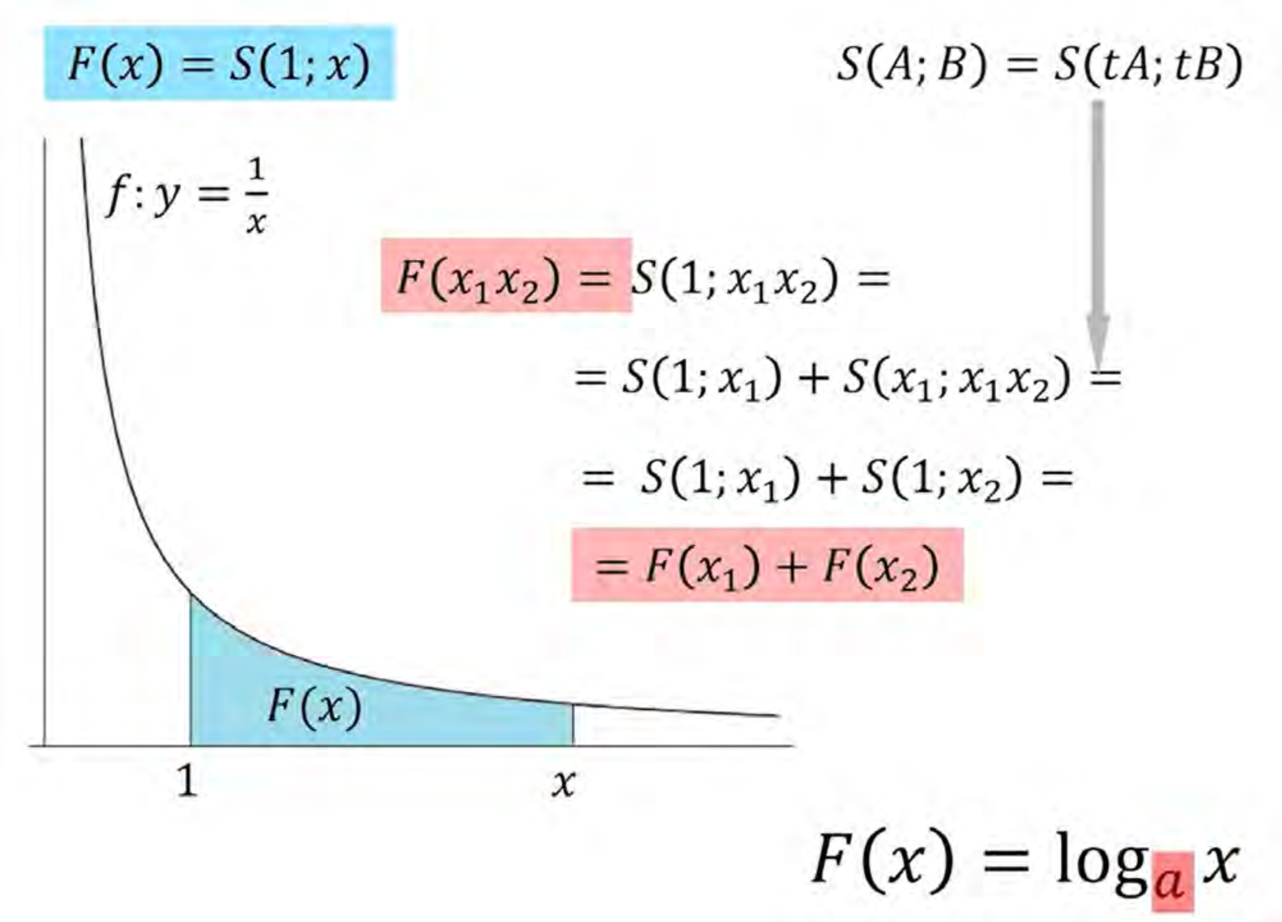
po x_1x_2. Tato plocha se dá napsat jako součet plochy od 1 po x_1 a plochy od x_1 po x_1x_2. Díky vlastnosti výše popsané je $S(x_1; x_1x_2)$ roven $S(1; x_2)$. V našem značení $S(1; x_1) \equiv F(x_1)$ a $S(x_1; x_1x_2) \equiv F(x_2)$. Nyní viz pravidlo (9). Plocha pod hyperbolou se chová jako logaritmus. Logaritmus o jakém základu?

S integrálním počtem víme, jak se počítá obsah plochy pod křivkou. Stačí nalézt primitivní funkci a provést rozdíl mezí. V našem případě jsme se dozvěděli, že primitivní funkce $F(x)$ k $f(x) = \frac{1}{x}$ je nějaký logaritmus. Derivace $F(x)$ musí nutně být $f(x) = \frac{1}{x}$. Jaká je derivace funkce $F(x)$ v bodě 1? Pokud dosadíme, dostáváme 1. Nyní pojďme užít definice derivace ke zjištění základu onoho logaritmu:

$$F'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{F(1+h) - F(1)}{h}$$

Zvolme substituci $h = \frac{1}{n}$, neboť výsledek tak bude v příjemnějším tvaru.

$$F'(1) = \lim_{n \to \infty} \frac{F(1+\frac{1}{n}) - F(1)}{\frac{1}{n}}$$



Obrázek 8: Plocha pod hyperbolou od 1 do x [4]

Víme, že $F(x)$ se chová jako logaritmus.

$$F'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{log_a(1+\frac{1}{n}) - \log_a 1}{\frac{1}{n}}$$

Logaritmus z jedné je roven nule. Získáme tak následující tvar:

$$F'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{log_a(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$$

Upravíme na jednoduchý zlomek.

$$F'(x) = \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

Užijeme pravidla (10).

$$F'(x) = \lim_{n\to\infty} \left(log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = 1$$

Tento výraz se musí rovnat jedné, jak jsme vypočítali výše. Z toho plyne, že základ se musí rovnat argumentu, neboli

$$a = e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{11}$$

Ukázalo se, že tato limita konverguje k číslu 2,718 281 828 ..., která se značí e – Eulerovo číslo. Tato konstanta se objevuje v mnoha oblastech matematiky i fyziky, například při spojitém úročení nebo při radioaktivním rozpadu. Logaritmus o základu e se značí ln, z latinského *logarithmus naturalis* – přirozený logaritmus. [6]

5 Weberův–Fechnerův zákon

Tyto zákony se týkají velikosti podnětu (fyzikální příčiny) a velikosti počitku (smyslového vjemu). Logaritmickou závislost oné velikosti objevil německý fyziolog Ernst Heinrich Weber (1795–1878), zákon poté zformuloval jeho žák Gustav Theodor Fechner (1801–1887) v roce 1860 v článku *Elemente der Psychofysik* (Elementy psychofyziky). Psychofyzika je věda zabývající se tím, jak lidé vnímají fyzikální podněty. [7]

5.1 Weberův zákon

Weberův zákon říká: *„Vzrůstá-li intenzita podnětu řadou geometrickou, pak roste intenzita počitku řadou aritmetickou“.* [7] Jiná fomulace zákona je, že mezní rozdíl intenzity stimulu (v angličtině JND – just noticeable difference) roste přímo úměrně s jeho intenzitou. Matematicky zapsáno:

$$\Delta S = k \ \cdot S, \tag{12}$$

kde ΔS je mezní rozdíl, S je intenzita stimulu a k je konstanta závisející na smyslu a člověku.

Weberův zákon nefunguje pro nízké intenzity podnětu a většinou ani pro vysoké intenzity. Přibližně odpovídá pravdě ve středním rozsahu intenzit. [7]

5.2 Fechnerův zákon

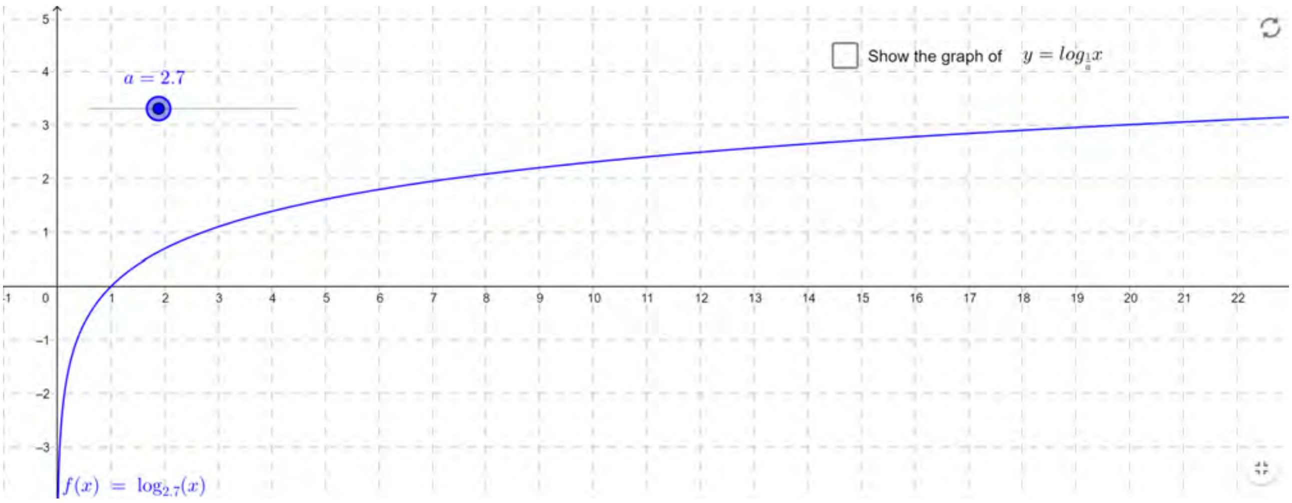
Fechner ve svých vlastních studiích zjistil, že vnímaná intenzita je přímo úměrná logaritmu poměru skutečné intenzity a nejvyšší možné vnímatelné intenzity.

$$p = k \ln \frac{S}{S_0}, \tag{13}$$

kde p je vnímaná intenzita, k je opět konstanta, S je intenzita stimulu a S_0 je nejvyšší možná intenzita podnětu, kterou je člověk možný vnímat.

Vidíme, že ve Fechnerově zákonu se objevuje přirozený logaritmus. To znamená, že pokud položíme na osu x vpravo od bodu $[1; 0]$ dvě stejně velké Δx, jednu blíže bodu $[1; 0]$ a druhou dále, tak u první Δx bude rozdíl funkčních hodnot Δy větší než u druhé Δx. Matematické odůvodnění nám poskytne derivace. Rychlost růstu funkce $\ln x = \frac{1}{x}$, což je funkce klesající.

Prakticky si Fechnerův zákon můžeme znázornit takto: Představme si, že jsme v knihovně a kamarád nám do rukou dává stejně těžké knihy. Rozdíl žádná kniha vs. jedna kniha bezpochyby poznáme. Rozdíl jedna kniha vs. dvě knihy taktéž. Ale rozdíl 10 vs. 11 knih už moc nepoznáme, natožpak rozdíl 20 vs. 21. u všech případů je rozdíl Δx jedna kniha, ale rozdíl ve vnímání Δy se zmenšuje, viz obrázek 9.



Obrázek 9: Graf přirozeného logaritmu [1]

6 Experimentální ověření Weberova zákonu

V experimentální části svého projektu jsem se pokusil ověřit Weberův zákon: $\Delta S = k \cdot S$. Ověřoval jsem ho pomocí měření ΔS – v tomto případě je ΔS rozdíl hmotností při dané počáteční hmotnosti S. Měření se zúčastnilo 6 osob, každá porovnávala celou sadu 8 hmotností.

6.1 Pomůcky

Písek, sada kelímků, permanentní fix, váhy měřící na setiny gramu, tužka, papír.

6.2 Příprava experimentu

Obrázek 10: Příprava experimentu

Podívejme se na obrázek 10. Nejprve jsem si připravil závaží. Ta tvořily kelímky naplněné pískem, vždy dva od každé hmotnosti. Zákon jsem ověřoval na hmotnostech 100 g–450 g s intervalem 50 g: 100 g, 150 g, 200 g, ... Dvojici kelímků jsem popsal příslušnou hmotností a čísly 1 a 2. Sadu závaží a přesné váhy jsem si postavil na stůl, kde experiment probíhal.

6.3 Průběh experimentu

1. Subjekt posadím ke stolu a vysvětlím mu postup experimentu. Dále ho poprosím, aby netipoval a aby si svým závěrem byl jistý. Jinak by moje data mohla být velice zkreslena. Subjektu doporučím, aby vážil jednou rukou a aby během experimentu techniku vážení neměnil a poprosím ho, aby nad hmotnostmi moc nepřemýšlel. Musí rozdíl jasně cítit.

2. Subjektu řeknu, aby zavřel oči a nebo aby se nedíval na kelímky a na váhu.

3. Vezmu n-tou dvojici kelímků (100 g) a do náhodně zvoleného přisypu m gramů (2 g).

4. Subjektu povím, že může začít vyhodnocovat.

5. Pokud subjekt neví, zavře oči a přisypu mu další gramy písku. Musím přisypávat postupně, abych „nepřestřelil".

6. Pokud subjekt určí špatný kelímek, zavře oči a přisypu mu další gramy písku.

7. Pokud subjekt určí správně, zavře oči a zahraji mu „sluchové divadlo". Subjekt slyší sypání písku do kelímku, ale já písek sypu do jiného kelímku, neboli hmotnosti testované dvojice se nemění. Pokud určí správně i napodruhé, rozdíl hmotností zapíšu a můžu přistoupit na další dvojici. Pokud určí subjekt napodruhé kelímek špatně, opakuje se proces o číslo výše. Subjekt musí dvakrát za sebou určit kelímek správně.

8. Takto změřím rozdíl hmotností pro každou dvojici kelímků.

U menších hmotností: 100 g–200 g přidávám po 1 g–3 g, u vyšších mohu přidávat po 4 g–5 g. Subjektu nesmím prozradit postup mého měření. Celé měření probíhá cca 40 minut, tj. 5 minut na dvojici.

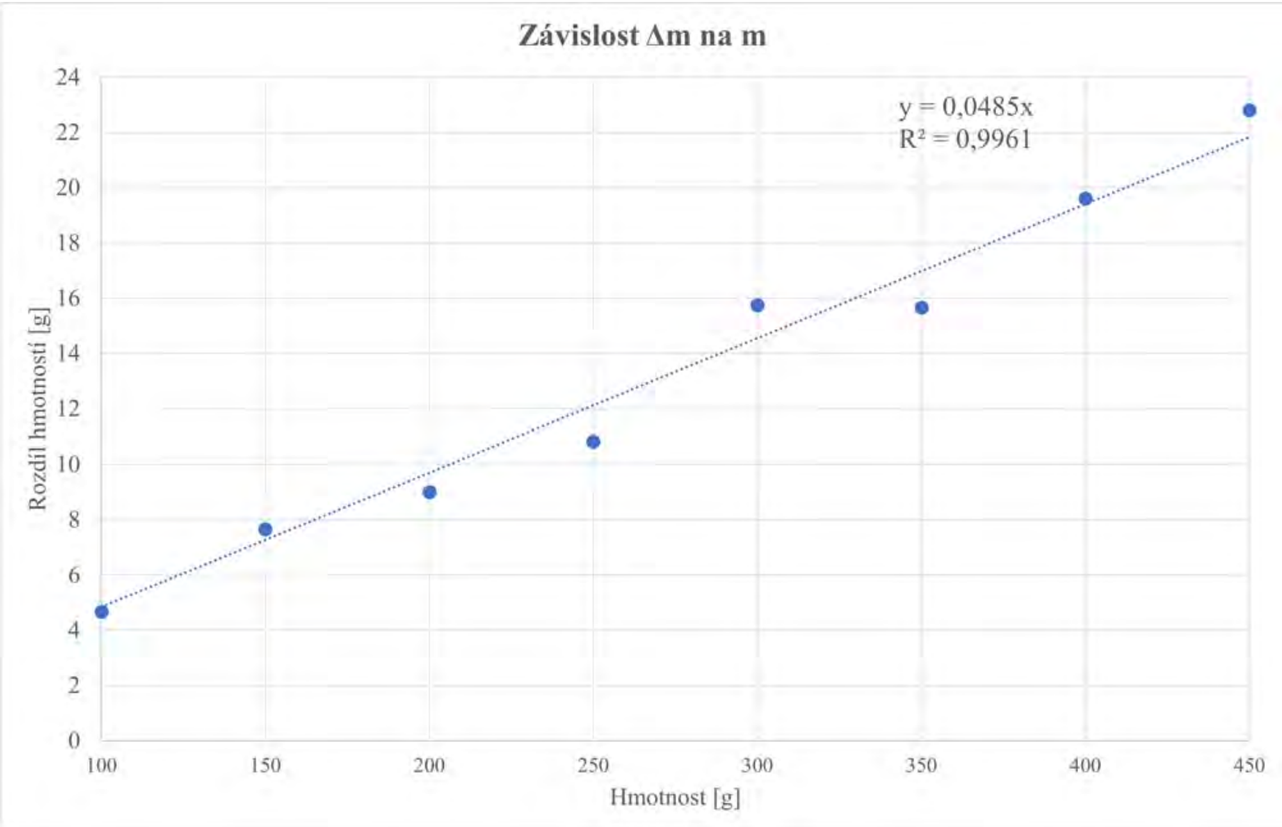
6.4 Výsledky měření

Podrobnou tabulku naleznete v souboru „`mereni_weberuv_zakon.xlsx`". V listu „Originální data" se nacházejí originální data z měření. V listu „Data po výmazu hrubých chyb" se nachází průměrná Δm, směrodatná odchylka σ a relativní odchylka δ. Dále jsem odstranil ta data, která hrubě neodpovídala průměru a směrodatné odchylce. Pro výslednou tabulku z listu „Data po výmazu hrubých chyb" viz tabulka 7 a pro výsledný graf viz obrázek 11.

Na základě tabulky 8 vidíme, že konstanta úměrnosti $k = 0,049$. Z toho teoreticky vypočtená Δm pro počáteční $m = 1\,000$ g je rovna 49 g. Dvěma subjektům jsem dal porovnat závaží

hmotnost závaží m [g]	Δm [g]	směrodatná odchylka σ	relativní odchylka δ
100	4,67	1,37	29%
150	7,67	1,51	20%
200	9,00	2,83	31%
250	10,83	3,37	31%
300	15,75	4,11	26%
350	15,67	4,84	31%
400	19,60	5,18	26%
450	22,80	4,60	20%

Tabulka 7: Výsledná tabulka měření



Obrázek 11: Výsledný graf měření

o počátečních hmotnostech 1 000 g. První subjekt poznal rozdíl při rozdílu 1 055 g, druhý při rozdílu 1 055 g, což odpovídá vypočtené hodnotě.

6.5 Závěr experimentu

Lineární závislost ΔS na S jsem ověřil v podstatě úspěšně. Konstanta úměrnosti, respektive teoreticky vypočtená hodnota ΔS z tabulky 8 se shoduje s hodnotou, kterou uvádí zdroj [7].

Výsledná konstanta k	0,049
Počáteční hmotnost [g]	1000
Vypočtená ΔS [g]	49

Tabulka 8: Výsledná konstanta úměrnosti a teoreticky vypočtená ΔS

Relativní odchylky se pohybují v rozsahu 26 %–31 %. To je dáno povahou měřicího nástroje – člověkem. Psychologie hrála při experimentu významnou roli a i přes mé instrukce a „sluchové divadlo“ se mohlo stát, že subjekt dvakrát tipnul správný kelímek. Někteří lidé jsou navíc přirozeně soutěživí a někdo může být při porovnávání hmotností zkrátka lepší. Rozdíly mezi pohlavími zde také mohly hrát svou roli. Nemohlo se tedy stát, že by všechny ΔS skončily v úzkém intervalu.

7 Závěr

V tomto projektu jsem popsal logaritmy z mnoha směrů. Odpověděl jsem na otázku proč byly logaritmy objeveny. Dále jsem odvodil některá pravidla pro počítání s logaritmy. Ukázal jsem, jak vypadají grafy logaritmických funkcí o různých základech. V roce 1614 byly publikovány první logaritmické tabulky. Popisuje zde jak fungují a jak tabulku zahustit. Dále v dokumentaci uvádím návod jak násobit na logaritmickém pravítku. V poslední části teoretické sekce píšu o původu čísla e a přirozeného logaritmu.

V druhé, praktické části nejprve popisuji teorii Weberova-Fechnerova zákonu a Weberův zákon jsem i experimentálně ověřil s dobrou přesností, pokud se přihlédne k faktu, že měřicí nástroj byl člověk, jehož vyhodnocovací schopnosti ovlivňuje psychika.

Seznam zdrojů

[1] KUBÁČEK, Zbyněk. Logaritmy pre začiatočníkov | docent Zbyněk Kubáček | Čo je to logaritmus a mocnina. In: Youtube [online]. 24. 2. 2023 [citováno 4. 7. 2023]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=lpFpKXuk2tg&t=1490s. Kanál uživatele FMFI UK.

[2] Přispěvatelé Wikipedie, Logaritmus [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2023, Datum poslední revize 31. 05. 2023, 04:01 UTC, [citováno 5. 7. 2023]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Logaritmus&oldid=22843707>

[3] HALAS, Zdeněk. LOGARITMY. Dějiny matematiky II [online]. [citováno 5. 7. 2023]. Dostupné z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Dejiny/logaritmy.pdf

[4] Jak funguje logaritmické pravítko? | Na ubrousek. In: Youtube [online]. 24. 2. 2023 [citováno 7. 7. 2023]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=QCcPoPVZyJQ. Kanál uživatele Na ubrousek.

[5] Jak skutečně počítat na logaritmickém pravítku? | Na ubrousek. In: Youtube [online]. 24. 2. 2023 [citováno 7. 7. 2023]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=MvCoMuWoPRQ. Kanál uživatele Na ubrousek.

[6] KUBÁČEK, Zbyněk. Zbyněk Kubáček - Dva spamy o logaritmoch | Didaktika matematiky. In: Youtube [online]. 24. 2. 2023 [citováno 4. 7. 2023]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=IQwnSo57Urc. Kanál uživatele FMFI UK.

[7] Přispěvatelé Wikipedie, Weberův–Fechnerův zákon [online], Wikipedie: Otevřená encyklopedie, c2023, Datum poslední revize 17. 04. 2023, 17:17 UTC, [citováno 7. 7. 2023]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Weber%C5%AFv%E2%80%93Fechner%C5%AFv_z%C3%A1kon&oldid=22710946>

[8] REICHL, Jaroslav a Martin VŠETIČKA. Weber - Fechnerův psychofyzikální zákon. Encyklopedie fyziky [online]. c2006–2023, 12. 6. 2008 [citováno 7. 7. 2023]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/210-weber-fechneruv-psychofyzikalni-zakon#

Seznam zdrojů obrázků

[1] YUK YIN, Kwan. Log graph. GeoGebra [online]. © 2023 [citováno 9. 7. 2023]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/nhxxm5mn

[2] F. LYON, Richard. Plot of logarithm function for three common bases. In: Wikimedia Commons [online]. únor 2011 [citováno 9. 7. 2023]. Dostupné z: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Logarithm_plots.png

[3] Jak funguje logaritmické pravítko? | Na ubrousek. In: Youtube [online]. 24. 2. 2023 [citováno 7. 7. 2023]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=QCcPoPVZyJQ. Kanál uživatele Na ubrousek.

[4] Zbyněk Kubáček - Dva spamy o logaritmoch | Didaktika matematiky. In: Youtube [online]. 24. 2. 2023 [citováno 4. 7. 2023]. Dostupné z: https://www.youtube.com/watch?v=IQwnSo57Urc. Kanál uživatele FMFI UK.