Fibonacciho posloupnost

Autoři:

Alexandra Seďová
Matyáš Provod
Ema Čekalová

Vedoucí:

Mgr. Jaroslav Reichl

2.7. – 16.7. 2022

Albrechtice v Jizerských horách

Anotace

Náš projekt se zabývá Fibonacciho posloupností, jejím využitím, výskytem a spojitostí se zlatým řezem. Během dokumentace se objevují i zmínky o samotném Fibonaccim a jeho dalších přínosech z oblasti matematiky. Nachází se tu i zdrojový kód z programovacího jazyka Python pro zjištění *n*-tého čísla Fibonacciho posloupnosti či vyčtení určitého jejich počtu.

Poděkování

Chtěli bychom poděkovat našemu vedoucímu práce, Jaroslavu Reichlovi, který nám poskytl podklady k zdokonalení práce i pomocnou ruku, když jsme ji potřebovali. Zároveň bychom chtěli poděkovat Vaškovi Kohoutovi, který nám poskytl materiály potřebné pro zpracování úloh o Fibonacciho posloupnosti.

Obsah:

Úvod

Fibonacciho posloupnost se poprvé objevila v indické matematice, již 200 let před naším letopočtem v Pingale. Světoznámou se však stala až pomocí knihy *Liber Abaci*, vydané roku 1202, od italského matematika Leonarda z Pisy.

Leonardo v knize vysvětlil posloupnost hlavně na příkladu růstu populace králíků. Ukázal světu, jak často se v matematice s touto posloupností setkáváme, aniž bychom si to vůbec uvědomovali. Jedna z oblastí, se kterou je posloupnost úzce spojena, je zlatý řez. Je dokázáno, že Fibonacciho posloupnost konverguje k hodnotě zlatého řezu, a tudíž se někdy navzájem doplňují.

Ovšem nejen v matematice se s touto posloupností můžeme setkat. Fibonacciho posloupnost vidíme všude kolem nás. Ať už to jsou semena slunečnice, okvětní lístky pryskyřníku či šišky borovic, všechny narůstají v určitém řádu.

Fibonacciho posloupnost se používá dodnes a stále se objevují nové a nové oblasti, kde se s ní setkáváme.

Leonardo Fibonacci

Leonardo Bonacci z Pisy, nazýván též Leonardo Fibonacci podle historika Guillaume Libriho, byl italský matematik žijící ve 12. a 13. století. Byl považován za nejtalentovanějšího muže Západu ve středověku.

Socha Leonarda Fibonacciho vytvořena sochařem Giovanni Paganucci
Obr. 1

Ve 12. století byla Pisa celkem rušným přístavem. Přes Pisu putovalo spoustu různých potravin a výrobků z různých zemí a v různých počtech. To vše vedlo k tomu, že obchodníci potřebovali nějak evidovat ceny a zásoby zboží přivezeného i odvezeného. Leonardo si všímal, jak složité je počítat různé zásoby a ceny potravin římskými číslicemi.

V rámci cestování s jeho otcem Guglielmem Bonaccim, který byl obchodním zástupcem Republiky v Pise, se dostal do Bugie, kde se seznámil v rámci studií s devíti indickými čísly. Všiml si, že tento způsob zapisování číslic byl o dost snazší než římský, a to ho dovedlo k myšlence napsat jakýsi návod na převod římských číslic na indo-arabský systém.

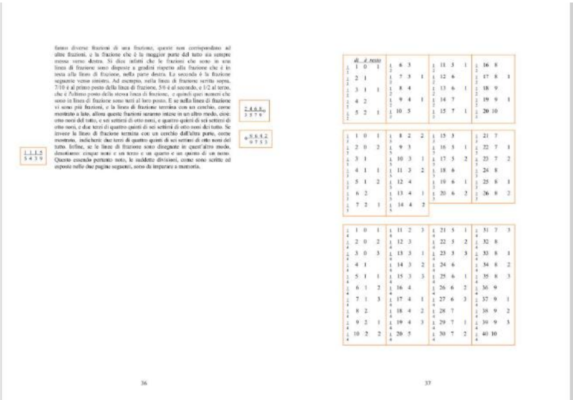
Za čas, kdy procestoval pobřeží Středozemního moře získával různé nové zajímavé poznatky o matematických operacích. Všechny tyto operace spolu s převodem číslování na nový systém a příklady znázorňující Fibonacciho posloupnost zakomponoval do své asi nejpopulárnější knihy *Liber Abaci*, 1202 (v překladu *Knihy výpočtů*).

Tato kniha vypomohla obrovským způsobem růstu evropského bankovnictví a účetnictví. Kniha *Liber Abaci* se bohužel nedochovala v originále, ovšem máme dostupný přepis knihy z roku 1228.

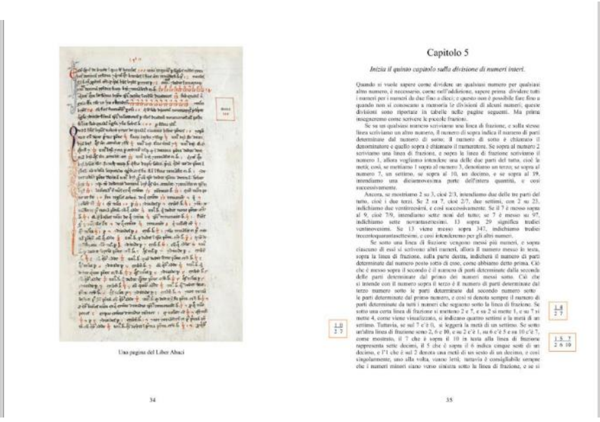
„Jestli jsem náhodou opomenul něco více či méně náležitého nebo nezbytného, prosím o odpuštění, protože nikdo není bez chyby a nikdo nemůže myslet na všechno.“

Slogan z knihy Liber Abaci

Zajímavou skutečností o L. Fibonaccim je, že vždy podával více než jednu verzi problému a většinu algebry psal verbálně, jak můžeme vidět na následujících obrázcích.



Obr. 2



Pozdější přepis knihy Liber Abaci s vloženou stránkou původního textu

Obr. 3

Celý postup řešení je napsán slovně, a kromě pár mezivýpočtů (viz okraje stránek), je vše zakomponováno do odstavců.

Kromě knihy *Liber Abaci*, vydal také jiné knihy ohledně matematiky, jako například *Practica Geometriae*. Ta pro změnu vysvětluje problematiku o technikách měření, měření obecně či dalších geometrických problémech.

O jeho pozdějším životě nevíme tolik informací. Víme pouze, že Leonardo Bonacci zemřel přibližně ve 40. či 50. letech 13. století, ale jeho dílo žije dál, a ještě dost dlouho bude.

Fibonacciho posloupnost

Fibonacciho posloupnost je pravděpodobně nejznámější matematickou posloupností a je definována následovně:

Fibonacciho posloupnost je nekonečná posloupnost přirozených čísel, v níž platí, že každé následující číslo je součtem dvou předchozích.

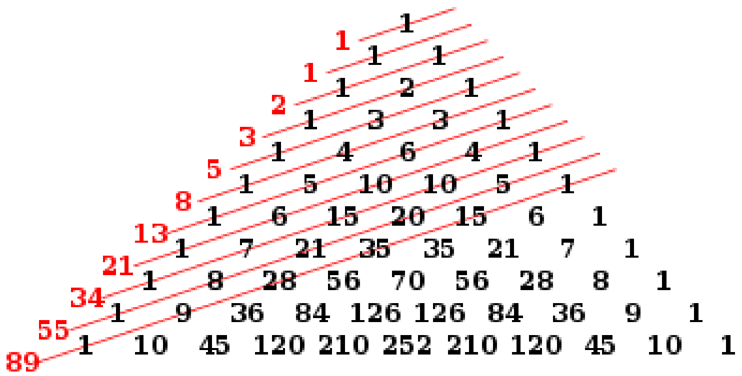
Posloupnost začíná čísly 1 a 1, a tedy bude pokračovat čísly 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, atd. (viz. obr.1). Také tato posloupnost slouží k řešení některých kombinatorických úloh (více v článku o využití). Velmi zvláštní vlastnost této posloupnosti je, že číslo x je Fibonacciho číslo, pokud tento výraz $\sqrt{5x^2+4}$ nebo $\sqrt{5x^2-4}$ je roven přirozenému číslu.

1.	2.	3.	4.	5.
1	1	2	3	5
6.	7.	8.	9.	10.
8	13	21	34	55
11.	12.	13.	14.	15.
89	144	233	377	610
16.	17.	18.	19.	20.
987	1597	2584	4181	6765

obr.4

1. Jak jde zjistit n-té číslo?

1.1. Pascalův trojúhelník: Fibonacciho čísla jsou součty “mělkých úhlopříček” Pascalova trojúhelníku. Viz obr. 5.



obr.5

1.2. Algoritmicky: Na výpočet máme následující vzorec:

$$F(n) = \frac{\varphi^n-(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

* φ je konstanta (zlatý řez), o které se píše v článku o zlatém řezu

F(n) zde vyjadřuje funkci Fibonacciho posloupnost a n tady vyjadřuje n-té číslo, které chce zjistit. Zde kupodivu vždy vyjde přirozené číslo, i přestože dělíme iracionálním číslem $\sqrt{5}$.

1.3. **Program – č. 1**: Následující počítačový program je napsán v jazyce python.

```
1. n = int(input(" Kolikáté Fibonacciho číslo: "))
2. c = []
3. c.append(1)
4. c.append(1)
5. for i in range (n):
6.     c.append(c[i + 1] + c[i])
7. print (c[n-1])
```

Na 1. řádku definujeme *n* jako číslo, které jsme napsali po spuštění programu.

Na 2. řádku jsme si založili seznam, do kterého budeme ukládat čísla z posloupnosti, a názvem *c*.

Na 3. a 4. řádku jsme do seznamu *c* uložili první dvě čísla z posloupnosti. K tomu slouží příkaz "*append*", který v češtině znamená *připojit*.

Na 5. a 6. řádku vytváříme cyklus, který nám bude do seznamu přidávat čísla na seznam.

5. řádek vytváří cyklus, který se bude *n*-krát opakovat, a i tady nevyjadřuje imaginární číslo, ale pokolikáté se cyklus opakuje (*i* začíná od 0 a končí *n-1*).

6. řádek přidá při každém cyklu další číslo. Tento výraz *c*[*i* + 1] + *c*[*i*] sčítá dvě předchozí čísla a tvoří nové.

Nakonec 7. řádek nám vypíše požadovaný výsledek příkazem "*print*", který v češtině znamená *vytisknout*.

2. Jak rychle zjistit čísla v posloupnosti?

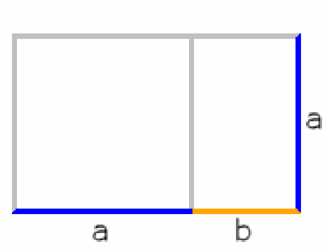
Program – č. 2: Následující počítačový program je napsán v jazyce python.

```
1. a = int(input(" Kolikáté Fibonacciho číslo: "))
2. c = []
3. c.append(1)
4. c.append(1)
5. for i in range (a):
6.     c.append(c[i + 1] + c[i])
7.     print (c[i])
```

1. až 6. řádek programu č. 2 je stejný jako u předchozího, proto se nyní přesuneme k vysvětlování 7. řádku. V rámci cyklu je zapsán příkaz *print(c*[*i*]*)*, který znamená: "vytiskni nové číslo v každém cyklu", takže nám to vypíše všechna čísla od 1. až do *n-tého* ve Fibonacciho posloupnosti.

Zlatý řez

Poměr dvou následujících čísel ve Fibonacciho posloupnosti se limitně blíží ke zlatému řezu (viz obr. 7). Zlatý řez je iracionální číslo, vzorcem vyjádřené $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ s přibližnou hodnotou 1,618 a značí se řeckým písmenem φ (česká výslovnost: fí). Zlatý řez je využívaný v obdélníku na obr.3. nebo taky ve "zlaté spirále", která připomíná šnečí ulitu.



obr. 6

číslo	podíl	rozdíl od zlatého řezu	číslo	podíl	rozdíl od zlatého řezu
1	1	-0,618033989	6765	1,618034	9,77191E-09
1	2	0,381966011	10946	1,618034	-3,73254E-09
2	1,5	-0,118033989	17711	1,618034	-3,73254E-09
3	1,666667	0,048632678	28657	1,618034	1,4257E-09
5	1,6	-0,018033989	46368	1,618034	-5,4457E-10
8	1,625	0,006966011	75025	1,618034	2,08007E-10
13	1,615385	-0,002649373	121393	1,618034	-7,94518E-11
21	1,619048	0,00101363	196418	1,618034	3,03477E-11
34	1,617647	-0,00038693	317811	1,618034	-1,15918E-11
55	1,618182	0,000147829	514229	1,618034	4,42757E-12
89	1,617978	-5,64607E-05	832040	1,618034	-1,69131E-12
144	1,618056	2,15668E-05	1346269	1,618034	6,45928E-13
233	1,618026	-8,23768E-06	2178309	1,618034	-2,46692E-13
377	1,618037	3,14653E-06	3524578	1,618034	9,41469E-14
610	1,618033	-1,20186E-06	5702887	1,618034	-3,59712E-14
987	1,618034	4,59072E-07	9227465	1,618034	1,37668E-14
1597	1,618034	-1,7535E-07	14930352	1,618034	-5,32907E-15
2584	1,618034	6,69777E-08	24157817	1,618034	1,9984E-15
4181	1,618034	-2,55832E-08	39088169	1,618034	0

Obr. 7

1. Vlastnosti:

1.1. Převrácený poměr: Převrácený poměr je velmi unikátní vlastnost, kterou má jen a pouze zlatý řez. Vzorcem se zapíše následovně:

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$$

1.2. Další unikátní vlastnosti:

$$\varphi = \varphi^2 - 1$$

$$\varphi = \frac{1}{\varphi - 1}$$

$$\varphi = \sqrt{\varphi + 1}$$

2. **Odvození:** Zlatý řez se dá spočítat i jinak než Fibonacciho posloupností. Nyní ukážeme 3 jiné způsoby, než jsme uvedli:

2.1. Odvození vzorcem a úpravami vychází z obdélníku na obr.3. Na obrázku vidíme 2 obdélníky: větší obdélník o rozměru $a * (a + b)$, a menší obdélník o rozměrech $a * b$. Menší obdélník z většího obdélníka vznikne, tak že do většího vložíme největší možný čtverec, tedy čtverec o rozměrech $a * a$. Pointa tohoto kroku je, že po tomto kroku jsou poměry stran uvažovaných dvou obdélníků stejné. Vzorcem můžeme nyní zapsat:

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a + b}$$

My hledáme hodnotu tohoto zlomku $\frac{a}{b}$, tak si ho označíme jako neznámou *x*. Pro zjednodušení dosadíme za $a = bx$:

$$\frac{b}{bx} = \frac{bx}{bx + b}$$

Po drobných aritmetických úpravách dostaneme následující kvadratickou rovnici:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Tato rovnice má dva reálné kořeny, ale nás zajímá pouze ten kladný:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Teď vidíme, že řešením je zlatý řez.

2.2. Tento postup se nevyskytuje v přírodě, spíše je pouze matematický:

$$\varphi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\ldots}}}}}}}$$

Pokračování tohoto výrazu se limitně blíží zlatému řezu.

2.3. Tento postup je velmi podobný předchozímu postupu:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}$$

Pokračování tohoto výrazu se opět limitně blíží zlatému řezu.

3. **Využití:**

Dále se zlatý řez hojně vyskytuje v přírodě ve formě Fibonacciho posloupnosti, třeba jako už výše zmíněná “zlatá spirála”, která připomíná šnečí ulitu nebo vzhled ananasu.

Dále se zlatý řez využívá v umění; konkrétně malíři v půlce 19. století jej užívali jako kompozici do svých obrazů, protože na pozorovatele působí svou neobvykle zajímavou symetrií, která je též využívána i v dalších oborech jako na příklad v architektuře, designu nebo i ve fotografiích.

Výskyt

Znaky Fibonacciho posloupnosti se objevují všude kolem nás. Jejich přítomnost lze zaznamenat všude od okvětních lístků, růstu rostlin, větvení stromů až po způsob, jakým jsou stočeny galaxie.

1. U rostlin je poměrně jednoduché zaznamenat výskyt Fibonacciho posloupnosti. Projevuje se u některých rostlin v počtu okvětních plátků. Například většina lilií a kosatců má 3 okvětní plátky, pryskyřník jich má 5 a sedmikrásky s kopretinami mívají 13, 21 nebo i 34. Musíme však počítat s tím, že v přírodě dochází v určité míře k vadám, takže u každého exempláře tomu tak samozřejmě nebude.
   Naše skupina zavítala do přírody, abychom mohli ukázat své vlastní příklady a zpět jsme přinesli tři kopretiny.

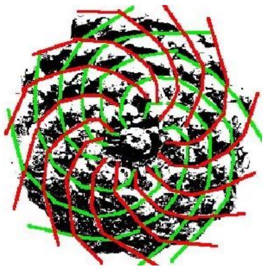
obr. 8

obr. 9

obr. 10

   Jak si můžete všimnout, dvě z našich kopretin mají přesný počet 21 okvětních plátků, zatímco třetí (viz na obr. 9) má o jeden více.

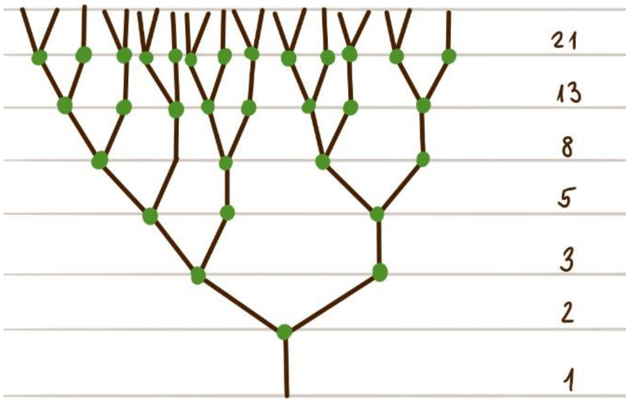
2. Dalším příkladem týkajícím se rostlin jsou třeba šišky borovice, které jsou zespoda stavěné do spirál. Buď můžeme spirály počítat po nebo proti směru hodinových ručiček, v obou případech však dostaneme jedno z čísel Fibonacciho posloupnosti (počítání z různých směrů však jiné). V tomto případě to tedy bude 8 (zelená spirála vyznačená na obr. 11) a 13 (červená spirála).



Obr. 11

3. Předchozího uspořádání si lze povšimnout i v terčích rostlin – třeba právě u slunečnic. Tady se můžeme dostat až k číslům jako 21, 34 nebo i 55 spirál. Možná se ptáte, proč by rostliny uspořádávaly svá semínka do těchto spirál s počtem patřícím mezi Fibonacciho čísla? Důvodem je, že tato forma uspořádání je pro ně nejvýhodnější a mohou díky ní prostor na semena využít nejefektivněji.

4. Fibonacciho posloupnost můžeme vidět i ve způsobu, jak se větví některé stromy nebo rostliny. Celkový počet větví v po sobě jdoucích patrech květiny nebo stromu ji totiž imituje. Nejdříve ze kmenu (viz 1 na obr. 12) vyroste jediná větev (2), která ze začátku roste sama o sobě, zatímco se kmen opět rozdělí (3). Tento proces nadále pokračuje.



Obr. 12

Obr. 13

Na obr. 13 můžete vidět keřík borůvčí, který jsme nalezli v lese. Rostlinu jsme opatrně přiložili k papíru a snažili jsme se větvičky rozložit tak, aby bylo jasně vidět, jak vyrůstají. Pomocí izolepy jsme keřík přilepili k papíru, na kterém jsme poté vyznačili patra a k nim počet výrůstků. Těchto pater máme 7, jelikož dále už nedávalo smysl pokračovat, vzhledem k tomu, že poté už větvičky z některých oddělených částí nestihly vyrůst.

5. Příkladem fylotaxe (uspořádání) je kůra ananasu. Každý malý dílek v kůře je součástí tří různých spirál. Počet jednotlivých spirál, které se točí tím samým směrem je obvykle jedním z Fibonacciho čísel. Tato čísla mohou jít od 5 po až 21.
   Díky našemu vedoucímu projektu nám bylo umožněno vyzkoušet si na našem vlastním ananasu, jestli a v jaké míře tento jev platí. Na *obr. 14, 15* si můžete všimnout prvního pokusu o označení spirál, které se napoprvé svíjely zprava nahoře dolů vlevo**.** Tento pokus, jak si můžete všimnout na obrázku, nevyšel podle plánů a ukázalo se, že v tomto směru náš ananas má pouze 7 spirál. Shora dolů jsme neměli o nic větší štěstí.

obr. 14

obr. 15

Naštěstí ale přišla poslední skupina spirál, poslední směr a štěstí se na nás usmálo. Zleva nahoře dolů vpravo totiž vedlo osm spirál, což můžete vidět na *obr. 16, 17, 18* kde je každá označená svojí vlastní barvou.

Obr. 16

obr. 17

obr. 18

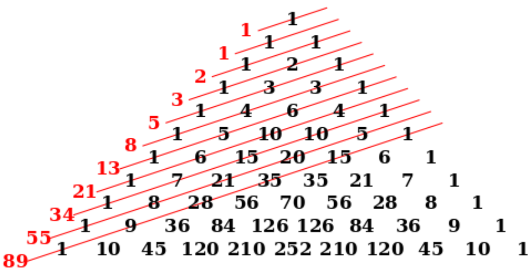
Tímto experimentem jsme došli k závěru, že i když je časté, že se v přírodě v určitých jevech Fibonacciho posloupnost objeví, neznamená to, že se opravdu ukáže u každého exempláře.

6. V přírodě se Fibonacciho posloupnost vyskytuje také u tvarů ulit mořských měkkýšů, které se tvoří ve tvaru logaritmické spirály související se zlatým řezem. Můžeme si jí ovšem všimnout i u rohů některých koz, tvaru galaxií či hurikánů.

Obr. 19

7. U lidí se známky zlatého řezu objevují také. Naše nosy a ústa jsou podle zlatého řez uspořádány a je řečeno, že kdo má rysy blíže k jeho poměru, bývá označován za atraktivnějšího.

8. Fibonacciho čísla mohou být nalezena i v mnoha dalších oborech včetně matematiky. S Pascalovým trojúhelníkem jsou si velice blízká. Pokud sečteme čísla po jeho diagonálách, dostaneme opět čísla z naší staré známé posloupnosti.



Obr. 20

9. Další zajímavou vlastnost těchto čísel můžeme využít při převádění z mil na kilometry. U tohoto převádění se totiž využívá poměru 1.60934, který je pro tuto operaci dostatečně blízko ke zlatému řezu, která se rovná přibližně 1.61803.

   Jelikož je možné zlatý řez vypočítat vydělením dvou po sobě jdoucích Fibonacciho čísel, jak už bylo řečeno dříve, můžeme je využít k sice trochu méně přesnému, ale rychlému a jednoduchém přepočtu mil na km.

   Funguje to zhruba takhle: pokud převádíme z *mil* na *kilometry*, vezmeme si počet mil a najdeme *následující* Fibonacciho číslo, které se bude rovnat počtu kilometrů. Pro převod z *kilometrů* na *míle* je to naopak. Musíme najít předchozí číslo posloupnosti.

Začneme s převáděním z *mil* na *km*. Vezměme si třeba číslo 34 jako počet mil a najděme číslo, co je v posloupnosti další na řadě. Dostaneme 55 km, což je opravdu malý rozdíl od 54.72 km, čemuž se to ve skutečnosti rovnat má.

míle	km	kalkulačka (km)	odchylka (km)
34	55	54.72	0.28
5	8	8.05	0.05
13	21	20.92	0.08

Obr. 21

Pro převedení z *km* na *míle* si vezmeme třeba číslo 21, na míle je to tedy 13, což se nachází hned po jeho levici. Pokud použijeme kalkulačku, dojdeme k 13.05 mil.

km	míle	kalkulačka (míle)	odchylka (míle)
21	13	13.05	0.05
89	55	55.3	0.3
233	144	144.78	0.78

Obr. 22

Jenže co dělat, když počet mílí nebo km není Fibonacciho číslo? Stačí vaše hledané rozložit na několik čísel patřících do posloupnosti a poté sečíst výsledky jejich převedení. Pro příklad si vezmeme třeba 15 km, ty si rozložíme na 13 a 2. Z 13 km dostaneme 8 mil a ze 2 km 1 míli. Už jen zbývá sečíst 8+1=9 mil, což sice má odchylku od přesných 9.32, ale je stále dostatečně blízko, aby se technika hodila.

Úlohy

Úloha o králících

Máme jeden pár právě narozených králíků. Kolik budeme mít párů králíků po dvanácti měsících, jestliže víme:

- každý pár dospěje za jeden měsíc od narození
- každému dospělému páru se každý měsíc narodí jeden další pár
- králíci nikdy neumírají?

Postup: Nechť F(n) je počet párů králíků po n měsících, a my chceme spočítat F (12), tedy počet párů králíků po 12 měsících. Nyní si vytvoříme tabulku, ve které budeme zaznamenávat počet dospělých párů a celkový počet párů králíků v prvních 6 měsících.

n měsíců	0	1	2	3	4	5
Počet párů po n měsících F(n)	1	1	2	3	5	8
Počet dospělých párů po n měsících	0	1	1	2	3	5

Jak můžeme vidět na naší tabulce, tak třetí řádek je verzí druhého řádku, jen je posunutý o jeden měsíc doprava. Dále můžeme vidět, že počet párů po n-tém měsíci je roven součtu počtu párů po (n-1)-tém měsíci a počtu dospělých párů po (n-1) měsíci, ale, jak už jsme napsali, třetí řádek je jen posunutou verzí druhého řádku o jeden měsíc, takže počet párů po n-tém měsíci je součet počtu párů po (n-1)-tém a (n-2)-tém měsíci. Vzorcem zapsáno:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Takhle tedy vypadá Fibonacciho posloupnost a my už jen musíme spočítat její 12. člen:

$$F(12) = 233$$

Řešení: Po dvanácti měsících budeme 233 párů králíků, a to je tedy 466 králíků.
Zajímavost: Tato úloha byla důvodem, proč Fibonacci vymyslel tuto posloupnost, a proto byla později na jeho počest pojmenována po něm.

Úloha o vycházení schodiště

Zajímavá úloha, která souvisí s Fibonacciho posloupností, i když by to člověk nečekal, když o tom poprvé uslyší, je o počtu možných způsobů, jak vyjít schody. Možnosti pro vycházení schodů jsou přitom jen dvě: buď jdete hned na následující schod nebo jeden přeskočíte.

Když r_n označíme jako počet možností výstupu n schodů, tak v prvním případě s pouze jedním schodem se $r_1 = 1$. To, že $r_2 = 2$, je také zcela jednoznačné. Když jdeme dále po řadě, dostaneme, že $r_3 = 3$ a $r_4 = 5$. Když se podíváme na dosavadní počty možných způsobů výstupu, můžeme si všimnout, že tato čísla následují Fibonacciho posloupnost. V tuto chvíli však ještě nemáme dostatek důkazů, abychom tuto teorii prohlásili za pravdivou.

Jelikož jsme si už řekli, že n schodů můžeme vystoupit r_n způsoby, začneme s prvním krokem, a to rozhodnutím, jestli prvním krokem zdoláme schody dva nebo jeden.

V případě jednoho schodu nám zbývá už jen $n - 1$ schodů. Ty jde vystoupat r_{n-1} způsoby.

V případě, kdy si vybereme dva zbyde už jen $n - 2$ schodů, a tudíž r_{n-2} způsobů.

Vzhledem k tomu, že pro $n \geq 3$ platí $r_n = r_{n-1} + r_{n-2}$. Tato rekurentní rovnice je nám už známá z počítání Fibonacciho čísel. Navíc se první dvě čísla obou rovnic shodují ($r_1 = F_1 = 1$ a $r_2 = F_2 = 2$). V tuto chvíli tedy můžeme říct, že $r_n = F_n$ platí pro každé $n \in N$.

Úloha o házení s mincí

Zadání další úlohy zní: je-li házeno mincí, jaká je pravděpodobnost, že po sobě dvakrát nikdy nepadne rub?

Nejdříve si označíme počet hodů jako různé n-tice skládající se z jednotlivých hodů, které budeme zapisovat jako R nebo L, značící hozený rub či líc. Dále si musíme uvědomit, že hledanou pravděpodobnost vyjádříme zlomkem s jmenovatelem, ve kterém bude celkový počet možností, což bude 2^n (vždy jsou dvě možnosti – R a L – a budeme mít n hodů).

Další proměnnou a_n označíme množství možných hodů vzhledem k ustanoveným podmínkám, a to že nepadnou dva ruby za sebou. Poté můžeme začít od nejmenšího počtu hodů, čili $a_1 = 2$ (R, L), $a_2 = 3$ (LL, LR, RL), $a_3 = 5$ (LLL, LLR, LRL, RLL, RLR). Můžeme si všimnout, že pro všechny tyto příklady platí $a_n = F_{n+1}$.

V tuto chvíli už nezbývá než si n-tice rozdělit do dvou skupin:

První možností je začít hozením líce (L). Poté je možné hodit cokoli jiného, takže zbývá $(n - 1)$-tic, které mohou začít jakýmkoliv symbolem.

Druhá je nejdříve hození rubu (R), čímž automaticky na druhou pozici musíme přiřadit líc (L), jelikož po rubu další rub hodit nechceme. Tímto způsobem nám už zbývá pouze $(n-2)$-tic.

Počet n-tic z první skupiny je $a_n - 1$ a z druhé $a_n - 2$, tudíž docházíme k výsledku $a_n = a_n - 1 + a_n - 2$ pro každé $n \geq 3$.

Vzhledem k tomu, že platí $a_1 = 2 = F_2$ a $a_2 = 3 = F_3$ a už jsme si ověřili, že každé další $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je součtem dvou předchozích čísel a dvě první čísla patří do Fibonacciho posloupnosti, dostáváme se k závěru, že $a_n = F_{n+1}$.

Pravděpodobnost tedy bude $P = \frac{F_{n+1}}{2^n}$.

Úloha o dlaždicích

Dalším příkladem Fibonacciho posloupnosti je počítání dlaždic. Máme zde dvě varianty, jak takovéto úlohy zpracovat.

1. **Způsob**

Zde máme napsané zadání první úlohy:

„Kolika způsoby lze pomocí dlaždic o rozměrech 1 × 1 a 1 × 2 vyplnit obdélník o rozměrech 1 x n?“

Výpočet je zcela jednoduchý. Začneme si takovou řadu *1 × n,* kde za *n* budeme dosazovat malé hodnoty.

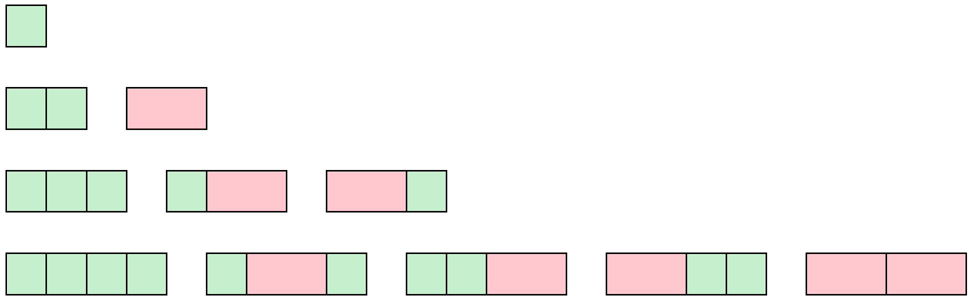
1 x n

1 x 1

1 × 2

1 × 3

1 × 4



Zelená barva označuje dlaždice 1 × 1 a červená dlaždice 1 × 2. Jak můžeme vidět, počet způsobů, jak vyplnit obdélník se zvyšuje pomocí Fibonacciho posloupnosti. A tak to pokračuje i nadále.

Obecně by se dalo říci, že počet způsobů, jak vyplnit obdélník o rozměru $1 \times n$ je součet způsobů, jak vyplnit obdélníky o rozměrech $1 \times (n–1)$ a $1 \times (n–2)$. Tedy dvou předchozích. A to, jak už víme, je definice Fibonacciho posloupnosti.

Pro lepší znázornění zde máme příklad na ověření, že teorie opravdu funguje.

1. *Příklad*

Řekněme, že jsme dostali za úkol vyřešit, kolika různými způsoby lze vyplnit chodník o rozměrech 1 × 16 dlaždicemi 1 × 1 či 1 × 2.

Postup je zcela jednoduchý. Musíme pouze zjistit, jaké číslo je 16. ve Fibonacciho posloupnosti (za předpokladu, že jedničku nepočítáme dvakrát). 16. číslo je, podle Fibonacciho posloupnosti, 1597. Tudíž je 1597 způsobů položení dlaždic.

Toto si můžeme ověřit též sečtením dvou předchozích Fibonacciho čísel (neboli součet počtu způsobů položení dlaždic u dvou předchozích rozměrů $1 \times (n\text{-}1)$ a $1 \times (n\text{-}2)$).

Tedy 14. a 15. číslo v posloupnosti. To je 610 a 987, což doopravdy vyjde 1597.

2. Způsob

Druhý způsob je velice podobný tomu prvnímu. Zde máme zadání druhé úlohy:

„Kolika způsoby lze pomocí dlaždic o rozměrech 1 × 2 vyplnit obdélník o rozměrech 2 × n?“

Zde vyplňujeme obdélník $2 \times n$ dlaždicemi 1×2. Máme tedy jen jeden druh dlaždic, který můžeme použít. Ovšem úloha je těžší v tom, že máme obdélník $2 \times n$ namísto obdélníku $1 \times n$.

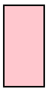
Pojďme si tuto situaci ukázat:

Máme k dispozici dlaždice:

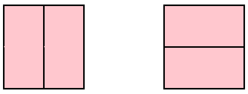
Dosadíme si za *n* malá čísla pro znázornění:

2 × n

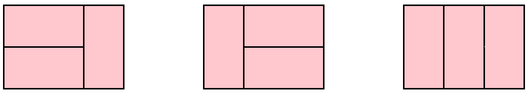
2 × 1



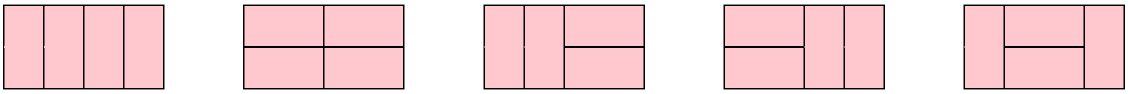
2 × 2



2 × 3



2 × 4



Jak si můžeme povšimnout tato řada roste podle Fibonacciho posloupnosti. Tudíž i zde můžeme použít stejné pravidlo jak u první varianty.

Závěr

V našem projektu jsme se věnovali Fibonacciho posloupnosti, jejím vlastnostem, tomu jak souvisí se zlatým řezem, příkladům výskytu v přírodě i v jiných oblastech a také samotnému Fibonaccimu. Co můžete v textu dále najít jsou i dva programy napsané v jazyce Python, zaměřující se buď na vyhledání *n*-tého Fibonacciho čísla nebo na vypsání všech čísel až po *n*-tý prvek.

Díky tomuto projektu jsme si dokázali, že se v přírodě opravdu nachází exempláře, které podle Fibonacciho posloupnosti rostou. Díky studiu nutnému pro vytvoření této dokumentace jsme se navíc i dozvěděli hodně informací o samotném Fibonaccim.

Nejvíce nás asi zarazilo, když jsme si po hodinách strávených vyhledáváním v knihách a na internetu šli sami najít nějaké rostliny, a opravdu jsme byli schopní najít keřík borůvčí, který splňuje podmínky Fibonacciho posloupnosti.

Další, tentokrát nemilé, překvapení nastalo, když jsme zjistili, že náš ananas nemá hledaný počet spirál rovnou ze dvou směrů. Naštěstí ale poslední směr podmínky splňoval.

Do budoucnosti by bylo možné napsat i programy na některé z úloh či vytvořit si program pro vykreslení zlatého řezu. Když se zaměříme na naše nalezené exempláře z přírody, bylo by ještě vhodné najít si svoji vlastní šišku z borovice nebo koupit slunečnici na prozkoumání jejích spirál.

Zdroje

Texty:
Leonardo Fibonacci:
https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci
https://cs.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci
https://cs.wikipedia.org/wiki/Fibonacciho_posloupnost
https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number#History
Mario Livio – Zlatý řez
Fibonacciho posloupnost, Zlatý řez:
Milan Mareš – Příběhy matematiky
https://cs.wikipedia.org/wiki/Fibonacciho_posloupnost
https://cs.wikipedia.org/wiki/Zlat%C3%BD_%C5%99ez
Výskyt:
Mario Livio – Zlatý řez

Obrázky:
Obr.1: https://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci#/media/File:Leonardo_da_Pisa.jpg
Obr. 2,3: https://archive.org/details/LiberAbaci/page/36/mode/2up
Obr. 5: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PascalTriangleFibanacci.svg
Obr. 6: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rechteck_GoldenerSchnitt.gif
Obr. 11: http://www.aesdes.org/2017/01/24/aesthetic-exploration-the-golden-ratio/
Obr. 19: Essential Skills for 21st Century Survival: Part I: Pattern Recognition | emergent by design
Obr. 20: 10 Facts On Leonardo Fibonacci And The Fibonacci Sequence | Learnodo Newtonic (learnodo-newtonic.com)

Úlohy:
Kombinatorika.pdf