

Magické čtverce
Magiaj kvadratoj

Zpracoval: Petr Velychko
Vedoucí práce: Mgr. Jaroslav Reichl

Soustředění mladých fyziků a matematiků
Josefův Důl 3.-17. 7. 2021

Poděkování

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu Jaroslavu Reichlovi za nesmírnou pomoc, kterou mi poskytl při zpracování tohoto projektu a také Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze za organizaci tohoto soustředění.

Abstrakt

Tato práce je věnována problematice magických čtverců. Byla prozkoumána historie jejich vzniku, vývoje a dnešní stav. Byly popsány některé metody tvorby magických čtverců, jejich výhody a nevýhody. Dále byl vyvinut programový doplněk Magic Squares sloužící ke generaci a práci s takovými magickými čtverci.

Resumo

Tiu ĉi verko temas pri la problematiko de magiaj kvadratoj. Estis esplorita historio de ilia enkonduko, disvolviĝo kaj ilia nuntempa kondiĉo. Plu estis priskribitaj metodoj de kreado de magiaj kvadratoj, iliaj avantaĝoj kaj malavantaĝoj. Fine estis kreita programo Magic Squares, kiu servas por kreado kaj laborado kun tiaj kvadratoj.

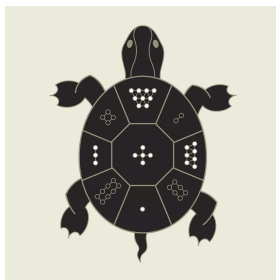
Obsah

| | |
|-------------------|---|
| 1 Úvod | 5 |
| 2 Teoretická část | 6 |
| 3 Praktická část | 7 |
| 4 Závěr | 8 |

1 Úvod

Magické čtverce byly známy již ve starověké Číně. Postavené na zdánlivě jednoduchém principu, tato pole představují určité potíže i pro dnešní vědce. Nejčastější variantou takových čtverců je pole o velikosti $n \times n$, které je vyplněno čísly a má určité zajímavé vlastnosti.

Jedním z nejstarších dochovaných magických čtverců je čtverec Lo Shu, který je často vyobrazován ve tvaru želvy, na jejíchž zádech jsou vzory odpovídající číslům:



Obrázek 1: Želva Lo Shu

Počty bodů v každé buňce odpovídají číslům a moderní reprezentace tohoto čtverce je zobrazena na obrázku 2.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

Obrázek 2: Moderní reprezentace čtverce Lo Shu

Jak můžeme vidět, tento čtverec je zajímavý tím, že součet čísel v řádcích, sloupcích a dvou úhlopříčkách je 15.

Na přelomu letopočtu se magické čtverce začaly šířit do dalších oblastí, jako je Indie a Japonsko. Vzniká také nejstarší a nejznámější magický čtverec 4×4 (obrázek 3) – nachází se v díle Brhat Samhita, jehož účelem byla výroba parfémů.

Dále vývoj směřoval ke zpřísnění podmínek a vymýšlení nových podmínek "hezkości" magických čtverců. Vznikly tak např. panmagické nebo nejperfektnější magické čtverce. Hlavním zaměřením této práce však budou jen magické čtverce.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 | 8 |
| 5 | 8 | 2 | 3 |
| 4 | 1 | 7 | 6 |
| 7 | 6 | 4 | 1 |

Obrázek 3: Brhat Samhita

2 Teoretická část

Probereme zde nejdříve obecné pojmy týkající se magických čtverců. Magický čtverec je takový čtverec, v němž součty čísel ve všech řádcích, sloupcích a dvou hlavních úhlopříčkách jsou stejné. Tento součet se nazývá magická konstanta. V případě, že se tento čtverec vyplňuje čísly od 1 do n^2 (pro čtverec $n \times n$) bez opakování, magická konstanta má tvar $\frac{n(n^2+1)}{2}$.

K vytváření magických čtverců se dají použít různé metody. Jednou z nejznámějších metod je bezesporu Siamská metoda (známá také pod názvem De la Loubèrova metoda), která se dá použít pouze pro čtverce lichého řádu.

Mějme čtverec lichého řádu $n \geq 3$ ($n \times n$). Začínáme v prostředním poli prvního řádku, kam napíšeme 1. Dále se pohybujeme o jedno políčko nahoru a doprava, přitom předpokládáme, že čtverec je zacyklený (nad prvním řádkem je poslední, pod posledním řádkem je první atd.) Pokud toto políčko je obsazené, použije se místo něj políčko pod tím původním, opět s ohledem na cykličnost čtverce. Dále se vyplní číslem o 1 větší než to předchozí. Tento algoritmus skončí v okamžiku, kdy již nebudou zbývat prázdná pole.

Příklad práce této metody je vidět na obrázku 4, kde bylo použito čtverce o velikosti 3×3 (maximální číslo v něm je $n^2 = 9$).

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

Obrázek 4: Siamská metoda pro $n = 3$

Další známou metodu pro generaci čtverců 3×3 je tzv. Lucasova metoda založená na triviálních aritmetických operacích. Mějme 3 přirozená čísla a , b a c , pro něž platí $a < b < c - a$ a $b \neq 2a$. Pak se čtverec 3×3 vyplňuje podle tabulky na obrázku 5:

Není těžké ověřit, že všechny příslušné součty jsou shodné a rovnají se $3c$. Tato metoda, ačkoliv jednoduchá, dokáže vygenerovat hodně různých čtverců.

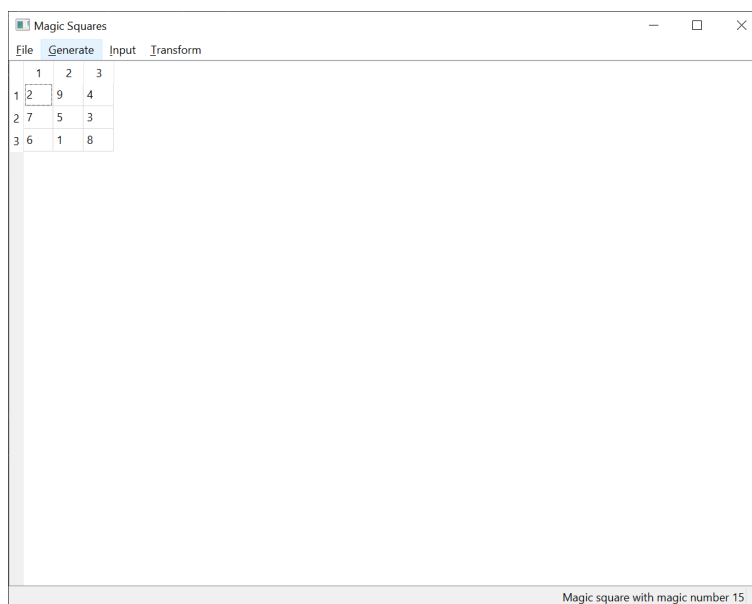
| | | |
|---------------|---------------|---------------|
| $c - b$ | $c + (a + b)$ | $c - a$ |
| $c - (a - b)$ | c | $c + (a - b)$ |
| $c + a$ | $c - (a + b)$ | $c + b$ |

Obrázek 5: Lucasova metoda

3 Praktická část

V průběhu vypracování tohoto projektu byl vytvořen doplněk v jazyce Python, sloužící ke generaci magických čtverců výše popsanými metodami a také kontrole, zda čtverec zadaný uživatelem je magický a výpočtu jeho charakteristik. K tvorbě grafického rozhraní byla využita knihovna QT a k práci s poli byla využita knihovna Numpy.

Na obrázku 6 je snímek obrazovky hlavního okna aplikace, který se skládá z uživatelského menu, tabulky s daty a stavového řádku. Horní lišta slouží k volbě operace, která má být provedena. V případě, že je zapnut režim přímé editace tabulky s daty, ve stavové liště se zobrazí slovo EDIT.



Obrázek 6: Hlavní okno programu

Když se uživatel nenachází v režimu úpravy, pak vidí ve stavovém řádku, zda se v tabulce nachází magický čtverec a případně jeho magickou konstantu. Dále je také umožněno uložit aktuální tabulku do souboru ve formátu CSV.

Tento vytvořený soubor pak může být upravován v externí aplikaci (např. textovém editoru nebo tabulkovém procesoru) a poté zase načten do programu Magic Squares.

Co se týče různých transformací, uživatel zde má možnost otáčení po a proti směru hodinových ručiček, svislé a vodorovné převrácení čtverce a převrácení podél úhlopříčky.

4 Závěr

V této práci byly zkoumány magické čtverce a jejich vlastnosti. Vytvořen byl také programový doplněk, který umožňuje generaci takových čtverců a následnou práci s nimi.

V budoucnosti by mohl být rozšířen repertoár metod generace magických čtverců a případně přidání animace pro postupné vykreslování daného čtverce.

Seznam obrázků

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Želva Lo Shu | 5 |
| 2 | Moderní reprezentace čtverce Lo Shu | 5 |
| 3 | Brhat Samhita | 6 |
| 4 | Siamská metoda pro $n = 3$ | 6 |
| 5 | Lucasova metoda | 7 |
| 6 | Hlavní okno programu | 7 |

Odkazy

- [1] Barbora Kociánová. *Magické čtverce*. Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy. URL: <https://prase.cz/library/MagickectverceBK/MagickectverceBK.pdf> (cit. 13.07.2021).