

# Co jsem dělal ~~o prázdninách~~<sup>1</sup> na Hrašticí 2021: Pád kuželů a koulí ve vzduchu aneb zjištění, že leccos je trochu jinak a že bude třeba měřit přesněji

Leoš Dvořák, KDF MFF UK Praha

Následující text je stručným popisem malého „miniprojektu“ na jarním soustředění pro budoucí učitele fyziky a spřízněné duše na Hrašticí v roce 2021.

Upřesnění: „Hrašticí 2021“ se nekonala na Malé Hrašticí, ale v Hluboké u Skutče, přesněji na základně Březina mezi obcemi Hluboká a Zderaz. A nebylo to soustředění jarní, protože se konalo v září (24.-28. 9. 2021). Ale atmosféra a „duch Hrašticí“ byly stejné.

Témata miniprojektů se měla týkat Marsu resp. expedice na Mars. Zkoumání odporu prostředí sem v zásadě patří, protože může jít o brzdění sondy v marsovské atmosféře. Reálné pokusy ovšem samozřejmě probíhaly v atmosféře zcela pozemské. ☺

## Úvod

Inspirace pro miniprojekt vznikla na dílně Mirka Jílka [2] na konferenci Dílny Heuréky 2021. Dílna byla věnována simulacím v programu Algodoo – ale jednou ze simulovaných situací byl pád tělesa v odporujícím prostředí, konkrétně ve vzduchu. A Mirek simulaci doplnil pokusem s pádem papírového kužele.

Druhým impulzem byly články [3] a [4], kde jsem rozebíral úlohu o pádu koule ve vzduchu – a trochu provokativně se snažil zjistit, jestli náhodou dřevěná koule nemůže dopadnout dřív, než železná. V daných člancích byl ale pád koule rozebírán jen teoreticky; jasně se proto nabízelo pád koule ve vzduchu naměřit, byť ne zrovna koule dřevěné či železné.

Třetí impulz pochází z přednášky Mechanika pro první ročník, kde vždy ukazují jednoduchým pokusem s pádem papíru s ohnutými okraji, že síla odporu vzduchu je úměrná druhé mocnině rychlosti. Jde ovšem o pokus demonstrační a měření je hodně přibližné. Tak proč to nezkusit přesněji.

## Trocha teorie

Pro sílu, která působí na těleso pohybující se v prostředí o hustotě  $\rho$  rychlostí  $v$  (v jistém rozmezí rychlostí, viz dále) platí *Newtonův vzorec* (viz [5], s. 359, [6], vztah (4,146), [7])

$$F_o = \frac{1}{2} C \rho S v^2, \quad (1)$$

kde  $S$  je příčný průřez tělesa (v rovině kolmé na směr rychlosti) a  $C$  koeficient závislý na tvaru tělesa. Jak je uvedeno v [5], vztah platí pro „střední rychlosti proudění“<sup>2</sup>; [6] upozorňuje, že vzorec (1) odporovou sílu aproximuje a  $C$  navíc závisí na Reynoldsově čísle  $Re$ , přičemž závislost se stanovuje experimentálně. Wikipedie na stránce [8] uvádí pro kouli hodnotu  $C = 0,50$ ; jiné zdroje, např. [9] uvádějí  $C = 0,47$ .

Při pádu tělesa z nulové počáteční rychlosti se rychlost postupně zvyšuje, až nakonec prakticky dosáhne *mezní rychlosti*  $v_m$ , při níž se odporová síla vyrovná tíhové síle:

<sup>1</sup> Tuhle reminiscenci na [1], jsem použil u příspěvků z hraštických soustředění už několikrát ...

<sup>2</sup> Pro malé rychlosti je odpor prostředí dán Stokesovou silou, ta je přímo úměrná první mocnině rychlosti.

$$\frac{1}{2} C \rho S v_m^2 = m g , \quad (2)$$

kde  $m$  je hmotnost tělesa a  $g$  tíhové zrychlení. Pokud je padající těleso lehké, může hrát nezanedbatelnou roli i vztlaková síla. Pravá strana (2) by pak byla  $m g - V \rho g$ , kde  $V$  je objem tělesa.

Ze vztahu (2) můžeme ze známé hodnoty  $C$  určit mezní rychlost jako

$$v_m = \sqrt{\frac{2mg}{C \rho S}} , \quad (3)$$

nebo naopak z naměřené mezní rychlosti určit koeficient odporu

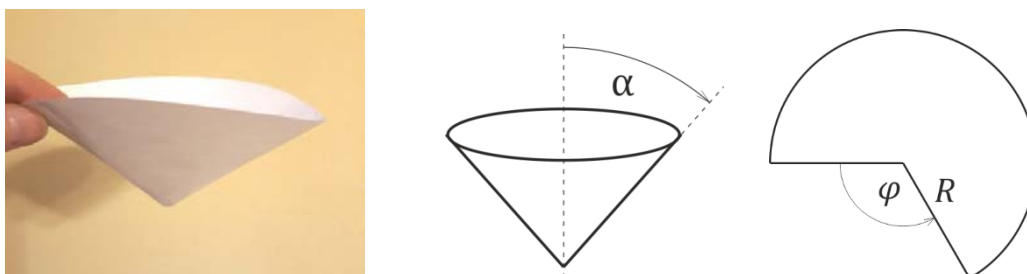
$$C = \frac{2mg}{\rho S v_m^2} . \quad (4)$$

Stačí tedy změřit mezní rychlost – a můžeme ověřit, zda třeba pro kouli koeficient odporu odpovídá tabulkové hodnotě. Tolik tedy základní teorie. Jak jednoduché! Neboli, jak by řekl Sherlock Holmes: „Elementary, my dear Watson!“ [10].

Sherlock Holmes by to možná brilantně proměřil i experimentálně a vyhnul se přitom všem problémům. Ovšem běžný smrtelník, jakým je i autor tohoto textu, se problémům a drobným překvapením nevyhne. Což se dalo i na „Hraštici“ a při následném zpracování naměřených dat. Ale zase je to příležitost se poučit... Následující text je proto krátkou zprávou o těch překvapeních a poučeních.

## Pád kuželů

Kužely byly vystříženy z papíru. Šlo fakticky jen o plášť kužele, jak ukazuje fotografie i náčrty ukazující, jak byl kužel z papíru vystřížen:<sup>3</sup>



Nápad nechat padat papírové kužely podpořila jednoduchá úvaha: Pokud bereme kužely se stejným vrcholovým úhlem, je hmotnost kužele přímo úměrná ploše papíru (jeho tloušťka je konstantní). Ploše papíru je přímo úměrná i plocha průřezu  $S$ . Ve vztazích (2) až (4) se tedy společný faktor vykrátí. V důsledku toho by tedy různě velké kužely se stejným vrcholovým úhlem měly padat stejně! Čili ze stejné výšky by měly padat stejně dlouho. To si přímo volá po ověření!

Následně (až po Hraštici) jsem objevil, že tohle využili při pokusech se studenty už autoři [11]. Patrně nejen oni, pokusů s padajícími kávovými filtry lze najít na internetu řadu. V příspěvku [11] se explicitně konstatuje, že pro studenty byla překvapením skutečnost, že různě velké kužely padají stejně rychle.

Zhotoveny byly kužely s úhly  $\varphi = 30^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  a  $270^\circ$ . Polovina vrcholových úhlů těchto kuželů (tedy úhlů mezi osou kužele a pláštěm) byla  $\alpha \doteq 60^\circ, 48,5^\circ, 30^\circ$  a  $14,5^\circ$ . Pro každý vrcholový úhel byly zhotoveny tři velikosti kuželů, s  $R = 10$  cm, 5 cm a 2,5 cm.

<sup>3</sup> Na náčrtu není zobrazen proužek šířky necelého 0,5 cm, který sloužil pro slepení pláště kuželu.

Hmotnosti kuželů (resp. jejich plášťů, tedy „kornoutů“) s  $\varphi = 90^\circ$  byly (od největšího k nejmenšímu) podle měření malými digitálními vážkami  $m = 1,98 \text{ g}$ ,  $0,49 \text{ g}$  a asi  $0,09 \text{ g}$ . Poslední hodnota je ale zjevně nepřesná, vážky zde již zřejmě měří s chybou; podle poměru velikostí kuželů by hmotnost měla být asi  $0,12 \text{ g}$ . Hmotnosti kuželů s jinými vrcholovými úhly zde explicitě neuvádíme.

Kužely byly pouštěny z natažené ruky, z výšky přibližně  $2 \text{ m}$ . Jejich pád byl natáčen digitálním fotoaparátem s frekvencí  $24 \text{ snímků/s}$ , natáčena byla dráha pádu v délce asi jeden metr. Fotoaparát byl asi metr od stěny, u níž kužely padaly. Nahrávky pak byly zpracovány v programu Tracker (verze 5.05).

### Jak špičaté kužely se hodí pro pokusy

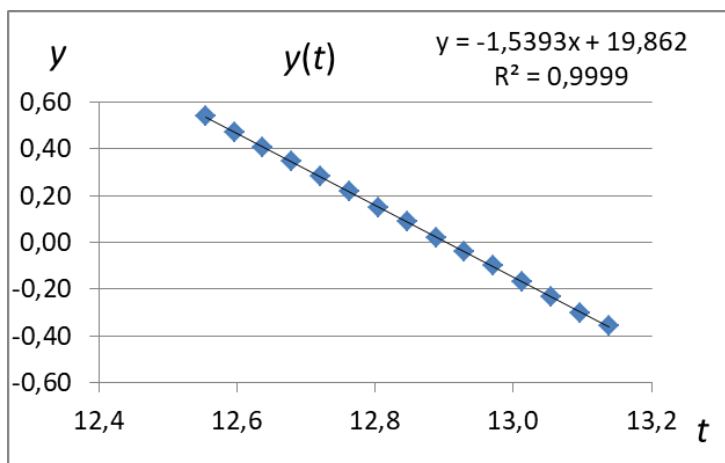
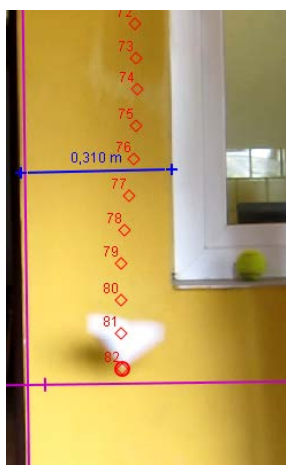
Ukázalo se, že kužely s  $\varphi = 30^\circ$  (tedy s vrcholovým úhlem  $2\alpha \doteq 120^\circ$ ) nepadají přímo dolů, ale při pádu se výrazně houpou do stran. Pro měření tedy nejsou příliš vhodné, jejich pády proto nebyly natáčeny a analyzovány. Jako málo vhodné se ukázaly i kužely s  $\varphi = 270^\circ$  ( $2\alpha \doteq 29^\circ$ ), ty se při pádu odchylovaly do strany. Příčina není příliš jasná, možná lze spekulovat, že roli hrálo splenění papíru, to by bylo vhodné v budoucnu vyjasnit. Pro jednoduché pokusy (např. pro žákovské projekty) jsou zřejmě vhodné kužely, které nejsou ani příliš rozevřené, ani příliš špičaté.

Pád jak příliš rozevřených, tak příliš špičatých kuželů šlo stabilizovat tím, že je ve špičce (zevnitř) zatížíme.<sup>4</sup> U špičatých kuželů, zejména menších, se však potom rychlost pádu zdá už relativně velká pro názorné žákovské pokusy, vhodnou zátěž bude třeba v budoucnu ještě vybrat a vyzkoušet.

Pro další pokusy (k nahrávání a analýze pádu) byly vybrány kužely s  $\varphi = 90^\circ$  a  $180^\circ$ , tj.  $2\alpha \doteq 97^\circ$  a  $60^\circ$ .

### Příklad měření: kužel s $R = 10 \text{ cm}$ a $\varphi = 90^\circ$

Příklad analýzy pádu papírového kužele Trackerem a následného zpracování v Excelu ukazují obrázky:



Graf ukazuje, že pád lze již považovat za rovnoměrný a změřenou rychlost za rychlost mezní. Tři po sobě jdoucí měření dala rychlosti  $1,674 \text{ m/s}$ ,  $1,516 \text{ m/s}$  a  $1,539 \text{ m/s}$ . Jejich průměr je  $v_m \doteq 1,58 \text{ m/s}$ . (Směrodatná odchylka činí asi  $0,07 \text{ m/s}$ ; vzhledem k malému počtu hodnot se na ni asi ale nelze příliš spoléhat; navíc by pro určení nejistoty resp. chyby měření bylo potřeba analyzovat i systematické chyby.) Koeficient  $C$  vypočtený ze (4) činí asi  $0,76$ .

<sup>4</sup> Děkuji Vítkovi Bočkovi za nápad použít k zatížení malé matičky. Sám jsem zamýšlel připevnit ke špičce kužele směrem dolů špejli, která by pád stabilizovala; použít matičky je jednodušší. Pro špičaté kužele stačila jedna matička M3, pro široce rozevřené kužel byly vhodné tři matičky.

### Pád různě velkých kuželů (aneb co se ukázalo, že je jinak)

Oproti výchozímu teoretickému předpokladu se ukázalo, že menší kužely padají poněkud rychleji. Výsledky (získané vždy z měření tří pádů) ukazuje tabulka:

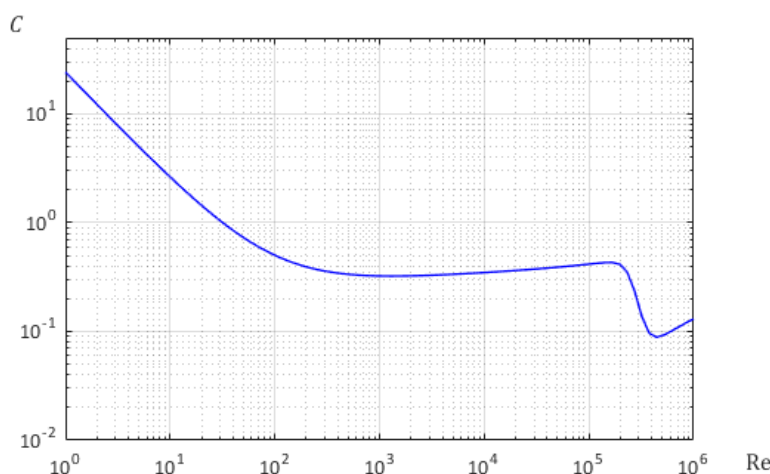
| $R$    | $v_m$    | $C$  |
|--------|----------|------|
| 10 cm  | 1,58 m/s | 0,76 |
| 5 cm   | 1,68 m/s | 0,66 |
| 2,5 cm | 1,77 m/s | 0,59 |

Vrcholový úhel kuželů byl ve všech případech  $2\alpha \doteq 97^\circ$ .

V případě kuželů s vrcholovým úhlem  $2\alpha \doteq 60^\circ$  jsou naměřené mezní rychlosti (od největšího do nejmenšího kužele) 2,04 m/s, 2,15 m/s a 2,34 m/s, vypočtené koeficienty  $C$  pak 0,66; 0,59 a 0,49. Skutečnost, že tyto štíhlejší kužely padají rychleji než ty rozevřené, není překvapením. Opět však vidíme, že menší kužely padají rychleji, než větší.

To, že menší kužely padají o něco rychleji než větší, je vidět i pouhým okem, když kužely pustíme současně vedle sebe. Rychlosti kuželů se neliší výrazně (připomeňme, že nejmenší kužel má šestnáctkrát menší plochu, než největší!), ale rozdíl je jasný.<sup>5</sup>

Jako možné vysvětlení se nabízí hypotéza, že koeficient  $C$  není konstantní. Pro kužel se zatím nepodařilo závislost v literatuře vyhledat, ovšem pro kouli uvádí řada zdrojů závislost  $C$  na Reynoldsově číslu v následujícím tvaru<sup>6</sup>:



Reynoldsovo číslo je

$$\text{Re} = \frac{v \rho d}{\eta}, \quad (5)$$

kde  $v$  je rychlost tělesa,  $\rho$  hustota tekutiny, v níž těleso padá (pro vzduch je asi  $\rho \doteq 1,2 \text{ kg/m}^3$ ),  $d$  příčný průměr tělesa a  $\eta$  viskozita tekutiny (pro suchý vzduch je  $\eta \doteq 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$ ). Z grafu je vidět, že i když je závislost  $C(\text{Re})$  v rozsahu Reynoldsových čísel  $10^3$  až  $10^5$  dosti plochá, přece jen je mírně rostoucí. Pokud by tomu bylo podobně i pro kužely, byly by pro menší kužely  $C$  opravdu nižší. (Reynoldsova čísla v případě realizovaných pádů jsou v rozsahu asi  $3 \cdot 10^3$  až  $1,6 \cdot 10^4$ ). Jak již ale bylo řečeno, závislost pro kužely se však dosud v literatuře nepodařilo najít.

<sup>5</sup> Zjevně tedy neplatí tvrzení uvedené v článku [11].

<sup>6</sup> Graf je převzat z článku [4].

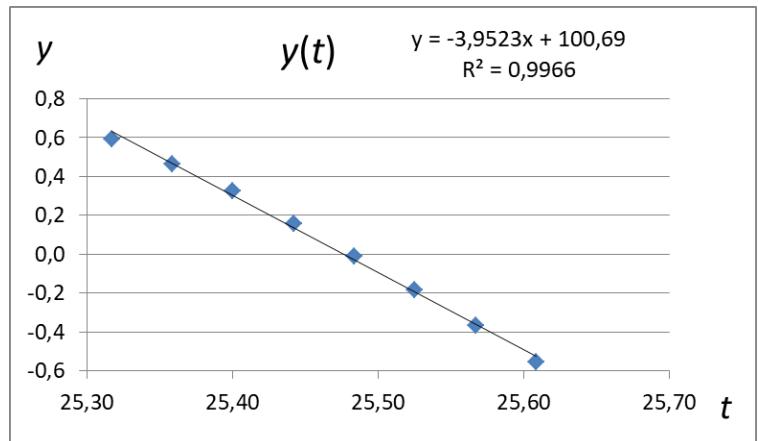
## Pád koulí

V případě pádu koulí byly použity polystyrénové koule o průměrech asi 16 cm, 7 cm a 5 cm. (Pro největší kouli je průměr spíše 15,8 cm; průměry byly vypočteny ze změření obvodu papírovým měřítkem a nelze je tedy asi považovat za příliš přesné.) Největší koule byla dutá. Hmotnosti koulí byly naměřeny digitálními vážkami jako 25,1 g, 4,85 g a 1,60 g.

Pád polystyrenových koulí proti zdi z výšky cca 2 m dal po natočení a analýze naprosto nerealistické hodnoty koeficientu  $C$ , pro velkou kouli dal výpočet 1,15. Petr Kácovský mě upozornil, že jsem neuvažoval vliv vztlaku. Výpočet příslušné korekce však ukázal, že činí jen asi 10 %.

Graf závislosti svislé souřadnice na čase zdánlivě vypadá, že pohyb koule je prakticky rovnoměrný. (Korelační koeficient blízký 1 se to zdá potvrzovat.) Podrobnější pohled však odhalí, že závislost se přece jen mírně ohýbá, zjevně tedy koule ještě nedosáhla své mezní rychlosti. A dosažení menší mezní rychlosti do (4) dá vyšší hodnotu  $C$ .

Znamená to, že je potřeba pouštět kouli z větší výšky.



Další pokusy proto byly provedeny s pomocí Petra Kácovského s pádem koule z okna v prvním poschodí chatky z výšky asi 3,5 m. Analýza natočeného videa však ukázala, že ani tato výška nestačí, aby u země měla koule rychlost dostatečně blízkou rychlosti mezní. Tento výsledek lze potvrdit i teoretickou úvahou: Pokud vezmeme pro  $C$  tabulkovou hodnotu 0,47, vychází z (3) mezní rychlost asi 6,4 m/s. Ze vztahů uvedených v článku [4] vychází charakteristická doba přibližování rychlosti k mezní  $\tau \approx 0,72$  s.<sup>7</sup> Pro  $t = 2 \tau$  se rychlost přiblíží k mezní na asi 3,5 %. Dráha uražená při pádu je dána vztahem (viz [4]):

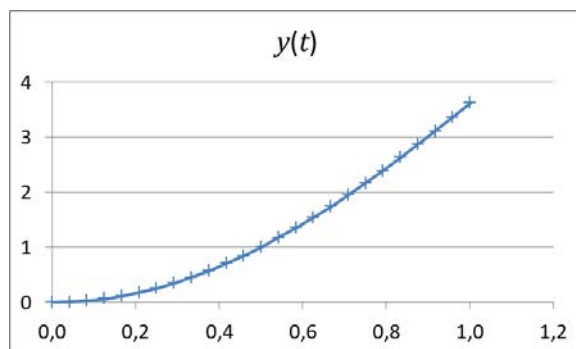
$$y = \tau v_m \ln(\cosh(t/\tau)). \quad (6)$$

Pro  $t = 2 \tau$  a výše dané parametry odtud vychází  $y \approx 6,1$  m. Pro jednoduchý odečet mezní rychlosti z pádu bychom tedy museli danou kouli nechat padat z výšky alespoň šest metrů. (Nebo více, podle požadované přesnosti.)

Video natočené při pádu ze 3,5 metru přesto lze využít. Hodnotami  $y_i$  dráhy pádu v časech  $t_i$  odečtenými z videa v programu Tracker můžeme proložit teoretickou závislost (6), resp. závislost  $y = g' \tau^2 \ln(\cosh(t/\tau))$ .<sup>8</sup> Proložení závislost bylo realizováno v Excelu pomocí jeho části Řešitel. (Byl minimalizován součet druhých mocnin rozdílů  $y_i - y(t_i)$ .) Graf ukazuje, že teoretická závislost dobře aproximuje naměřená data:

<sup>7</sup> Rychlost pádu v odporujícím prostředí kdy síla je úměrná  $v^2$  je  $v = v_m \operatorname{tgh}(t/\tau)$ , viz [4]. Přitom  $v_m = g' \tau$ , kde  $g'$  je tíhové zrychlení zmenšené o korekci danou vztlakem (v případě velké polystyrenové koule je to  $g/1,1$ ).

<sup>8</sup> Ta je výhodná, protože obsahuje jediný neznámý parametr  $\tau$ . Ve skutečnosti ovšem prokládáme závislost  $y = g' \tau^2 \ln(\cosh((t - t_0)/\tau)) + y_0$ , protože z videa se těžko přesně určuje čas začátku pádu i přesná počáteční poloha, takže parametrů je víc.



Vše vypadá dobře, objevila se ovšem další potíž: Mezní rychlost vypočtená z proložené závislosti vyšla asi 7,6 m/s; z ní spočtená hodnota  $C$  pak  $C \doteq 0,324$ . To je zjevně příliš málo. V měření či zpracování dat zřejmě bylo něco špatně.

Ukázalo se, že problém patrně bude v kalibraci délek při zpracování v Trackeru. Kalibrace byla provedena pomocí měření vzdáleností mezi podlahou a stropem vstupní plošinky před chatkou – jenže koule padala kus před přední stěnou chatky. Tím jsou uražené vzdálenosti trochu přeceňovány; skutečná uražená dráha je menší, menší než naměřená je tedy i rychlost pádu.

Kalibraci lze provést i pomocí šířky koule (necelých 16 cm). Výsledky pak vycházejí lépe (viz dále). Ovšem vzhledem k tomu, že obrys koule je na videu trochu rozmazán, není tato kalibrace příliš přesná.

Hodnoty koeficientů  $C$  (pro velkou polystyrenovou kouli) určené ze třech pádů po uvedeném překalibrování vyšly 0,607, 0,544 a 0,518. Přitom v prvním případě byl pád koule ovlivněn větrem, koule byla snášena poměrně výrazně doleva. Ze dvou dalších měření průměrná hodnota koeficientu vyšla asi 0,53, což je oproti tabulkové hodnotě 0,47 o necelých 13 % více.<sup>9</sup>

### Jak by bylo vhodné měření vylepšit<sup>10</sup>

Měření provedená na Hraštici je potřeba chápat spíše jako první pokusy, které ukázaly, že měřit koeficient odporu prostředí  $C$  pomocí jednoduchých pokusů není úplně triviální a má-li vést ke spolehlivějším výsledkům, bude třeba ho zpřesnit a vylepšit. Co si z provedených měření a jejich analýzy vzít za poučení?

- 1) Při měření bude třeba změřit vzdálenost fotoaparátu od padající koule a od stěny, na níž máme vyznačenu délku pro kalibraci měření. Ideální by bylo mít kalibrační tyč v přesně stejné rovině (kolmé na osu objektivu fotoaparátu nebo kamery), v níž padá koule nebo kužel. To by bylo potřeba nějak kontrolovat, např. tím, že by to sledoval další pozorovatel z boku (tedy, že by měl oko ve výše uvedené rovině), případně bychom z boku pád natáčeli druhým fotoaparátem. Tak by se zajistilo, aby byly polohy padající koule měřeny co nejpřesněji. (Ukázalo se totiž, že na přesné kalibraci velmi záleží.<sup>11</sup>)
- 2) Bude potřeba předem stanovit, z jaké výšky pouštět kouli ev. kužel, aby se rychlost dostatečně přiblížila mezní rychlosti. Zjevně i pro polystyrenové koule to bude z výšky několika pater, alespoň dvou. Natáčení a analýza pádu od začátku a následné proložení teoretické závislosti

<sup>9</sup> Oproti někde uváděné hodnotě 0,5 by rozdíl byl je 6 %.

<sup>10</sup> Alternativní, a možná adekvátnější nadpis této části by mohl znít:

Co vše jsem při pokusech a měřeních dělal špatně, na co jsem zapomněl a co bude třeba změnit. :-)

<sup>11</sup> Ve vztahu (4) je rychlost v druhé mocnině, takže chyba 10 % v určení rychlosti znamená chybu asi 20 % v  $C$ .

funguje, ale nepřesná kalibrace délek může výsledek zhatit.

Upozornění: I při analýze proložením teoretické křivky je třeba mít natočenou a analyzovanou dostatečnou část pádu, kdy už se odpor vzduchu výrazně projevuje. V případě, kdy byla koule puštěna z ruky proti zdi, a byl natočen jen asi první metr pádu, vedlo proložení teoretické závislosti (6) k naprosto nesmyslným výsledkům.

- 3) Bude potřeba prověřit, zda při prokládání závislosti nevynechat několik prvních bodů, kdy rychlost je tak malá, že závislost síly na rychlosti ještě není kvadratická, ale spíše lineární. (První pokusy nenaznačují, že by to výslednou hodnotu  $C$  významněji ovlivnilo, ale bude vhodné toto ověřit a pokud první body opravdu nebudou mít vliv, tak vysvětlit, proč nemají.)
- 4) Je otázkou, zda pro přesnější určení polohy padající koule nenakreslit na její bok nějakou výraznou značku.<sup>12</sup> Problém by ovšem byl, kdyby koule při pádu rotovala (kolem jiné než svislé osy).
- 5) V budoucnu by bylo dobré kromě analýzy videa Trackerem měřit rychlost koule či kuželu současně ještě jinou metodou a porovnat, nakolik se výsledky měření shodují. Nabízí se např. měření ultrazvukovým měřičem vzdálenosti nebo optickou závorou.
- 6) V případě pádu kuželů bylo následně po Hrašticí provedeno ještě jednoduché „ruční“ měření rychlosti pádu pomocí stopek. Kužel padal z výšky necelé dva metry, měřen byl čas, za který prolétl posledních 130 cm nad podlahou, z toho byla spočtena průměrná rychlost. (Jde tedy o pokus, který lze rychle a jednoduše použít ve třídě; podobně jsme rychlost odhadovali v dílně, která byla inspirací pro hraštická měření, jak bylo vedeno výše.) Z pěti měření vyšla rychlost asi 1,32 m/s; měření na Hrašticí analyzovaná Trackerem dala 1,58 m/s. Odchylka je skoro 20 %. Je vidět, že měření stopkami vnáší do výsledku výraznou nepřesnost; s tím asi bude třeba při „ručních“ měřeních počítat. I uvedenou odchylku bude vhodné v budoucnu ověřit, a to při měřeních, které budou dělat různí lidé.

## Závěr

Měření pádu těles v odporujícím prostředí s cílem určit hodnotu koeficientu  $C$  se ukázalo být větší výzvou, než se zpočátku zdálo.

Pokusy ovšem přinesly zajímavá, a pro další experimentování užitečná zjištění:

- Menší papírové kužely, navzdory jednoduchému předběžnému teoretickému odhadu, padají o něco rychleji, než větší.
- Příliš široké kužely nejsou samotné pro pokus vhodné, protože se příliš kolébají do stran. Jako nevhodné se ukázaly i příliš úzké kužely – zdá se, že „zatácejí do strany“. Chování kuželů lze stabilizovat závažíčkem ve špičce kužele. To ovšem zvyšuje mezní rychlost, takže pokus už je méně vhodný jako jednoduchý demonstrační pokus.
- Papírové kužely zřejmě dosahují mezní rychlosti poměrně brzy, takže je stačí pouštět z ruky z výšky asi 2 metry. To bude třeba ještě detailněji analyzovat. Polystyrenové koule (i v případě velké duté koule) ovšem bude třeba pouštět z výšky několika pater, nejméně dvou. Potřebnou výšku bude vhodné předem odhadnout teoreticky.

---

<sup>12</sup> Zatím byla poloha odečítána z horní hrany koule, což při větších výškách pádu vede k určité nepřesnosti vzhledem k tomu, že se mění úhel mezi směrem, pod nímž kouli pozorujeme, vůči vodorovné rovině. U padajících kuželů byla určována poloha jejich vrcholu, což je vyhovující.

- I když koule při pádu nedosáhne mezní rychlost (resp. se jí nepřiblíží dostatečně, třeba na jedno procento), lze mezní rychlost určovat proložením poloh teoretickou závislostí (6). Nestačí ovšem využít jen počáteční úsek pádu, měření musí zahrnovat i část pádu, kde má odpor prostředí významnější vliv. Při měření poloh z videozáznamu je třeba dbát na co nejpřesnější kalibraci délek, jinak mohou být výsledky značně zkresleny.

A ještě zjištění z následné rešerše:

- Přestože se jako „tabulková hodnota“ udává pro faktor  $C$  pro kouli obvykle 0,50 nebo 0,47, ve skutečnosti různí autoři uvádějí hodnoty od 0,4 do 0,51 i mimo tento rozsah, viz např. Tab 2 v [12].

Zdá se tedy, že na hodnoty uváděné v tabulkách a dalších zdrojích na internetu nelze striktně spoléhat a má tudíž smysl snažit se o co nejpřesnější vlastní měření – už proto, abychom učitelům i studentům provádějícím v rámci výuky a různých projektů měření s pádem těles ve vzduchu, mohli poskytnout informace, co skutečně může v jednoduchých pokusech vycházet.

## Poděkování

Petrovi Kácovskému patří můj dík za pomoc při měření pádu polystyrenových koulí z větší výšky a za konzultace, co by mohlo být špatně, když měření nedávala očekávané výsledky.

## Literatura

- [1] Pratchett, T.: *Zajímavé časy*. Český překlad Talpress, 1998.
- [2] Jílek M.: *Simulujeme*. Dílna na konferenci Dílny Heuréky 2021, Praha, 17.-19. 9. 2021. (Příspěvek z dílny bude publikován ve sborníku konference.)
- [3] Dvořák, L.: *Jak provokovat, když dostanete úlohu o pádu železné a dřevěné koule I*. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 96 (2021), č. 2, s. 57–67.
- [4] Dvořák, L.: *Jak provokovat, když dostanete úlohu o pádu železné a dřevěné koule II*. *Rozhledy matematicko-fyzikální*, roč. 96 (2021), v tisku.
- [5] Kvasnica J. a kol.: *Mechanika*. Academia, Praha, 2004.
- [6] Havránek A.: *Klasická mechanika II. Kontinuum*. Karolinum, Praha, 2003.
- [7] Wikipedie: *Odpor prostředí*. Dostupné online: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Odpor\\_prost%C5%99ed%C3%AD](https://cs.wikipedia.org/wiki/Odpor_prost%C5%99ed%C3%AD)
- [8] Wikipedie: *Činitel odporu*. Dostupné online: [https://cs.wikipedia.org/wiki/%C4%8Cinitel\\_odporu](https://cs.wikipedia.org/wiki/%C4%8Cinitel_odporu)
- [9] Wikipedia: *Drag coefficient*. Dostupné online: [https://en.wikipedia.org/wiki/Drag\\_coefficient](https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient)
- [10] The Phrase Finder: *The meaning and origin of the expression: Elementary my dear Watson*. Dostupné online: <https://www.phrases.org.uk/meanings/elementary-my-dear-watson.html>
- [11] van der Valk A.E., Mooldijk A.H., Wooning J.M.: *Guiding for inquiry learning: the falling paper cones case*. Dostupné online: <http://www.fisica.uniud.it/URDF/girepseminar2003/abstracts/pdf/vandervalk.pdf>
- [12] Dobeš J, Kozubová M: *The influence of numerical models on determining the drag coefficient*. EPJ Web of Conference 67, 0 20 19 (2014), DOI: 10.1051/epjconf/20146702019 . Dostupné online: [https://www.epj-conferences.org/articles/epjconf/pdf/2014/04/epjconf\\_efm-13\\_02019.pdf](https://www.epj-conferences.org/articles/epjconf/pdf/2014/04/epjconf_efm-13_02019.pdf)