

FYZIKÁLNÍ MODEL MATEMATICKÉHO KYVADLA

Alexandra Falvey

V rámci svého bádání na Hraštici jsem se rozhodla vytvořit fyzikální model matematického kyvadla. Speciální měl být v tom, že jeho konstrukce umožňuje tvořit záznam kmitání ve formě sinusoidy, která popisuje polohu hmotného bodu v čase.

Konstrukce je jednoduchá. Pomocí přiloženého obrázku (viz obr. 1) s popisem lze kyvadlo složit z následujících součástí:

Obrázek 1 - konstrukce matematického kyvadla s možností záznamu kmitání



1. **hlavní křídlo** složené ze dvou částí
 - a. **nosná část**
 - b. **stěžeň**

2. **podpěrný trojúhelník**
3. **nosný kvádr** (střežejní část křídla je do něj zaklíněna – uprostřed jedné stěny kvádru je díra – a zajištěna tavným lepidlem)
4. **nohy** (mezi nimi je místo na protažení záznamového papíru)
5. **měřítka** (lze jej nastavit podle odchylky kyvadla tak, aby 0 odpovídala počáteční poloze vlákna /bod 6/ - tedy tam, kde sinus protíná osu x)
6. **vlákno**
7. **hmotný bod** (závaží z korku s dírou – zúženou vespod, procházející celým objektem – a háčkem; do díry je možno vložit sypký či kapalný materiál – tedy náplň pro záznam sinusoidy /případně světelný zdroj, který je schopen zanechat stopu na luminoforu/)

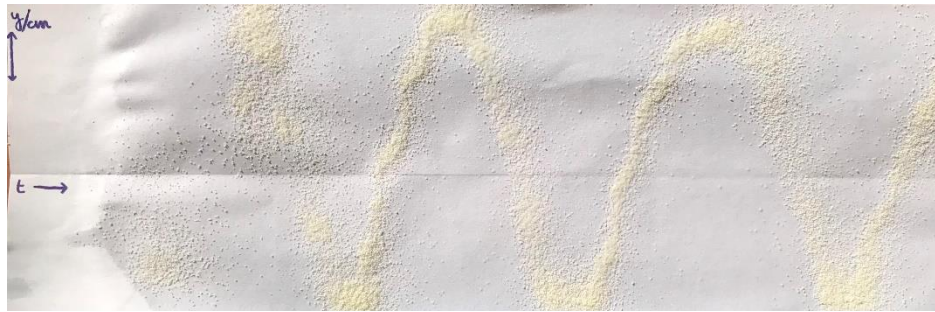
Hlavní myšlenka tohoto experimentu byla taková, že schopnost kyvadla zaznamenávat průběh kmitání umožní zaznamenat i vliv nedokonalých součástí. Matematické kyvadlo je teoreticky dokonalé – bez odporu vzduchu a vnějších vlivů (např. vítr), bez odporu tření vlákna, samo nikdy nepřestane kmitat a působí na něj pouze 2 síly: tíhová síla a tahová síla vlákna. Kmitání takového kyvadla v čase opisuje dokonalou sinusoidu.

Zavěšením vhodných součástí můžeme měřením v krátkém čase dostat sinusoidu, která se té matematicky dokonalé podobá: tlumené kmitání se takto pozná až při delším měření – porovnáním konce záznamu se začátkem. Za vhodné součástky lze v tomto případě považovat tenké, ohebné a pevné vlákno a dostatečně těžké a malé závaží. Tenkost vlákna sníží vliv odporu vzduchu, ohebnost omezí odpor tření o křídlo kyvadla (*viz obr. 1 bod 1a*), pevnost zajistí, že vlákno udrží závaží. Závaží by mělo být dostatečně těžké z toho důvodu, aby lépe napínalo vlákno, které by se vlivem větru mohlo deformovat, malá velikost závaží opět sníží vliv odporu vzduchu. U hmotného bodu na teoretickém matematickém kyvadle na hmotnosti nezáleží, u reálného kyvadla v izolovaném prostředí také ne.

Konstrukce je provedena tak, aby se zmiňované dvě součástky (vlákno /*obr. 1, bod 6*/ a závaží /*obr. 1, bod 7*/) mohly měnit. Závaží je přichyceno na vlákně háčkem, lze ho tedy z vlákna odháknout. Vlákno je na křídle upevněno pevným uzlem (kravská smyčka), který třením znemožňuje pohyb vlákna na dřevě křídla, ale umožňuje začátek kmitu (díky pružnosti vlákna) pod uzlem. Zároveň lze pomocí tohoto uzlu zkracovat a prodlužovat vlákno podle potřeby, uzel po provázku tahem klouže, je ale schopen vydržet v nastavené poloze. Uzel je jednoduše rozvazatelný a vlákno je tak možno vyměnit za jiné. Změna délky vlákna se následně také projeví na zaznamenávané sinusoidě. Výměnou tenkého vlákna za tlustší (např. pletací příze) můžeme na záznamu pozorovat efekty způsobené nedokonalostí zvoleného vlákna. Stejný druh efektu můžeme pozorovat výměnou malého závaží za objemově větší.

Během mého bádání jsem měla čas pouze na měření pomocí jednoho vlákna (tenká nit) a sice více druhů závaží, nicméně experiment fungoval pouze s jedním (korkový špunt). Závaží jsem naplňovala několika druhy materiálů pro záznam sinusoidy, opět se ale jen jeden ukázal jako vhodný pro tento experiment (mouka). Na obrázku níže (*viz obr. 2*) je vidět záznam, pořízený z měření. Záznamů jsem měla několik, ale nestihla jsem je před znehodnocením deštěm vyfotit, takže přikládám jen jeden z nich. Další záznamy si ale fotili ostatní účastníci letošní Hraštice, takže je možná uvidíte od nich, pokud je posílali.

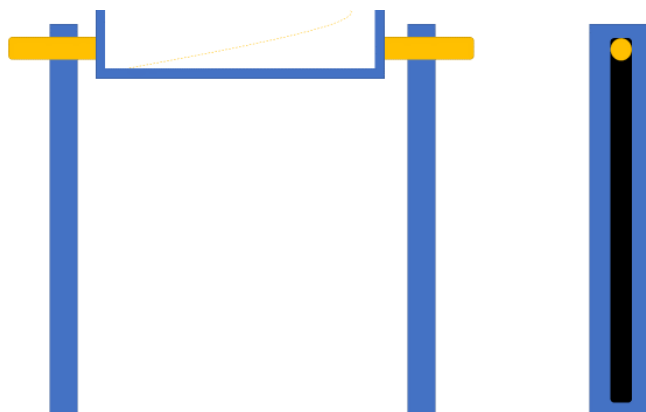
Obrázek 2 - záznam kmitání hmotného bodu na matematickém kyvadle



Mechanismus záznamu sinusoidy je jednoduchý. Papír formátu A4 se ohne v polovině kratších stran obdélníku, tím získáme dlouhý a tenký pruh papíru, který se vejde mezi nohy kyvadla. Papír se přehne ještě jednou opět uprostřed kratších stran vzniklého obdélníku. Tímto krokem se vytvoří osa x (časová osa). Papír se rychle namočí vodou (šlo by i potřít tekutým lepidlem), aby se voda nestihla dostat do hlubších vrstev papíru a on tak nebyl náchylnější k natrhnutí. Dále se papír vloží mezi nohy kyvadla a osa x se srovná s hodnotou 0 na měřítku (viz obr. 1, bod 5). Nakonec jen vychýlíme kyvadlo podle možností měřítka (to by mělo být dlouhé jako prostor mezi nohama kyvadla). Kdybychom tuto délku překročili, amplituda sinusoidy by se nacházela mimo záznamový papír. Rychlost, kterou se papír pohybuje směrem ven zpod kyvadla můžeme ovlivnit vlastním tahem ruky, pokud pod kyvadlo nebyl zajištěn tažný mechanismus s definovanou rychlostí tahu. Pro tento případ je lepší na osu x neuvádět jednotky a použít záznam jen jako demonstrační pomůcku při dokazování, že kmitání v čase opisuje sinusoidu. Kdyby bylo žádoucí či potřebné sinusoidu měřit v přesném čase, lze to uskutečnit několika způsoby:

1. Důvěřujete-li tahu své ruky natolik, že jste přesvědčeni, že uděláte pravidelnou sinusoidu, dá se celý průběh měření natočit na videozáznam ze shora a změřit tak čas měření s přesným odkazem na to, kde se hmotný bod nacházel v konkrétním čase. To by se dalo uskutečnit i bez konstantní rychlosti tahu, ale vzdálenosti mezi nulovými body sinusoidy by se nepěkně lišily.
2. Do nohou kyvadla (v tomto případě je nutno udělat nohy dostatečně dlouhé) je možno vyvrtat dlouhé rovné otvory do nichž by se prostrčily úchyty se silným třecím zařízením, aby umožnily člověku tah jen jednou maximální rychlostí. Tyto úchyty by byly napojeny na plošinu, na kterou by se položil záznamový papír (viz animace obr. 3 níže).
3. Do prostoru mezi nohama kyvadla se vyrobí posuvná plošina (otáčecí pás, nebo jen plošina na kolečkách) poháněná jednoduchým motorkem, který by plošinu posouval konstantní rychlostí.

Obrázek 3 - GIF znázorňující konstrukci posuvu plošiny s papírem konstantní rychlostí vlivem velkého tření



Po ukončení měření je nutno papír položit na místo, kde může schnout. Po vyschnutí papíru se záznamem se mouka na papíře udrží i vzhůru nohama a někdy dokonce i při pokusu o setření mouky z papíru, když je papír před měřením správně namočen. Na výsledném záznamu, pokud jsme použili sypký materiál, je nakonec vidět nejen samotná sinusoida průběhu kmitání, ale můžeme si všimnout i malých hromádek na vrcholech jednotlivých amplitud, které prokazují, že se závaží (nebo hmotný bod) na konci kmitu zpomaluje (viz obr. 2). Výsledný graf tedy ukazuje rychlost kmitání i jeho zrychlení v jednotlivých polohách vychýlení.

Využití pro výzkumy na Marsu je takové, že se díky tomuto experimentu dá spočítat tíhové zrychlení na Marsu – například s využitím následujících rovnic pro výpočet úhlové frekvence:

Obrázek 4 - grafické znázornění potřebných údajů k výpočtu úhlové frekvence

(matematické kyvadlo)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

(fyzikální kyvadlo)

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J + ml^2}}$$

nebo s využitím rovnice pro výpočet potenciální energie (u fyzického kyvadla):

$$E_p = mgh = mgl \cdot (1 - \cos \alpha)$$

Úhel vychýlení hmotného bodu lze dopočítat pomocí údaje na měřítku, délky vlákna (musí se po každém nastavení změřit) a znalosti goniometrických funkcí (viz obr. 4).

